

## Il metodo della variazione delle costanti

Conosciute due soluzioni  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  linearmente indipendenti di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$u'' + 2b(t)u' + c(t)u = 0$$

tutte le soluzioni dell'equazione completa

$$(1) \quad u'' + 2b(t)u' + c(t)u = f(t)$$

si possono ottenere da un'integrazione che coinvolge  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  e il termine noto  $f(t)$ .

Consideriamo, per semplicità il caso in cui i coefficienti  $b(t)$  e  $c(t)$  siano costanti, e supponiamo inoltre che

$$c > b^2$$

In tal caso le due soluzioni  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  sono come ben noto della forma

$$u_1(t) = e^{-bt} \cos(\omega t), \quad u_2(t) = e^{-bt} \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{c - b^2}$$

Cerchiamo soluzioni della (1) nella forma

$$(2) \quad y(t) = \alpha(t)u_1(t) + \beta(t)u_2(t)$$

con coefficienti  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  da determinare, naturalmente non costanti (altrimenti la combinazione lineare proposta sarebbe ancora soluzione dell'equazione omogenea e non della completa).

Derivando una prima volta l'espressione (2) si ha

$$y'(t) = \alpha(t)u_1'(t) + \beta(t)u_2'(t) + \alpha'(t)u_1(t) + \beta'(t)u_2(t)$$

se i due coefficienti  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  verificano la condizione

$$(3) \quad \alpha'(t)u_1(t) + \beta'(t)u_2(t) = 0$$

allora si ha

$$y'(t) = \alpha(t)u_1'(t) + \beta(t)u_2'(t)$$

da cui, derivando una seconda volta,

$$y''(t) = \alpha(t)u_1''(t) + \beta(t)u_2''(t) + \alpha'(t)u_1'(t) + \beta'(t)u_2'(t)$$

Tenuto conto che  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  soddisfano l'equazione omogenea, le espressioni  $y(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $y''(t)$  soddisfano l'equazione (1) se e solo se è soddisfatta la condizione

$$(4) \quad \alpha'(t)u_1'(t) + \beta'(t)u_2'(t) = f(t)$$

Si riconosce pertanto che le funzioni (2) soddisfano l'equazione (1) se e solo se le derivate  $\alpha'(t)$  e  $\beta'(t)$  soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \alpha'(t) u_1(t) + \beta'(t) u_2(t) = 0 \\ \alpha'(t) u_1'(t) + \beta'(t) u_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Con la notazione delle formule di Cramer,

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(\tau) \\ f(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix}} d\tau, \quad \beta(t) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} u_1(\tau) & 0 \\ u_1'(\tau) & f(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix}} d\tau$$

Da cui, svolgendo i conti,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & u_2(\tau) \\ f(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix} &= -e^{-b\tau} \cos(\omega\tau) f(\tau), & \begin{vmatrix} u_1(\tau) & 0 \\ u_1'(\tau) & f(\tau) \end{vmatrix} &= e^{-b\tau} \sin(\omega\tau) f(\tau) \\ \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix} &= \omega e^{-2b\tau} \end{aligned}$$

Da cui, sostituendo,

$$\alpha(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t e^{b\tau} \sin(\omega\tau) f(\tau) d\tau, \quad \beta(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{b\tau} \cos(\omega\tau) f(\tau) d\tau$$

Ovvero ricostruendo l'espressione (2)

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{b(\tau-t)} [-\sin(\omega\tau) \cos(\omega t) + \cos(\omega\tau) \sin(\omega t)] f(\tau) d\tau =$$

$$(5) \quad y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

Tutte le soluzioni dell'equazione (2) sono pertanto espresse dalla formula

$$(6) \quad y(t) = e^{-bt} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

**OSSERVAZIONE 0.1. Un'interpretazione qualitativa.**

L'espressione fornita in (6) consta, naturalmente di due addendi

- il primo rappresenta una (qualsiasi) soluzione dell'equazione omogenea,

- il secondo, quello con l'integrale, rappresenta una soluzione particolare dell'equazione completa.

La presenza di attrito -  $b > 0$  - implica del resto che il primo termine é destinato a smorzarsi, cioè con il passare del tempo le soluzioni dell'equazione completa somigliano sempre piú al solo secondo termine, quello integrale.

#### OSSERVAZIONE 0.2. **Attrito e memoria**

Consideriamo la soluzione particolare

$$y(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

e supponiamo di decomporre l'intervallo di integrazione  $[0, t]$  in due parti

$$[0, t] = [0, t - \delta] \cup [t - \delta, t]$$

La presenza dell'attrito,  $b > 0$ , ovvero del fattore di smorzamento

$$e^{-b(t-\tau)}$$

implica che

$$\tau \in [0, t - \delta] \quad \rightarrow \quad e^{-b(t-\tau)} \leq e^{-\delta}$$

ovvero che, sostanzialmente,

$$\int_0^t e^{-b(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) f(\tau) d\tau \approx \int_{t-\delta}^t e^{-b(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

Tenuto conto inoltre che, causa l'attrito, anche gli addendi soluzioni dell'omogenea si smorzano progressivamente, si riconosce che le soluzioni dell'equazione completa sono, in ogni tempo  $t$  abbastanza grande il risultato della forza applicata  $f(\tau)$  in un intervallo di tempo precedente,  $[t - \delta, t]$  e non tengono gran che conto dell'azione della forza in tempi molto precedenti....

..... l'attrito cancella la memoria.