ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Prova scritta del 6–9-2010

1. Spazio euclideo ordinario $\mathbf{E}_3$. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i vettori geometrici w_1=hi-j+k, w_2=hi+j-hk, w_3=(2h+1)i-2j+k, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare, se esiste, un valore del parametro h in corrispondenza del quale i vettori geometrici w_1, w_2, w_3 risultino linearmente dipendenti.

(b) Detto W il sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V dei vettori geometrici, generato dai vettori geometrici w_1, w_2, w_3 di cui al quesito (a), verificare che W è un piano vettoriale e scrivere l'equazione cartesiana di W.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto P_0(-1,-1,2) ed avente come giacitura W.

(d) Decomporre il vettore geometrico v=2i+j+k nella somma di due vettori geometrici v′ e v″ rispettivamente normale e parallelo al piano p.

(e) Determinare gli angoli convessi che la retta s passante per il punto P_0, perpendicolare al piano p ed orientata verso il basso forma con gli assi coordinati.

Soluzione

(a) La matrice quadrata che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori geometrici w_1, w_2, w_3 ha determinante –h-1 e quindi tali vettori risultano linearmente dipendenti per h=-1.

(b) Per h=-1, risultano linearmente indipendenti, per esempio, i vettori geometrici w_1 e w_2. Allora il sottospazio vettoriale W, generato dai vettori geometrici w_1, w_2, w_3, ammette come base i vettori geometrici w_1 e w_2 onde ha dimensione 2 ed è pertanto un piano vettoriale. Sviluppando il determinante formale della matrice quadrata che ha come prime colonne le colonne delle coordinate di w_1 e w_2 e come terza colonna la colonna delle incognite x, y e z, si ha che l'equazione cartesiana di W è: x+z=0.

(c) L'equazione cartesiana del piano p passante per il punto P_0(-1,-1,2) ed avente come giacitura W: x+z=0 è: x+1+z-2=0, ossia x+z-1=0.

(d) Un vettore geometrico generico normale al piano p è ρ(i+k), essendo ρ un parametro reale. Un vettore geometrico generico li+mj+nk risulta parallelo al piano p se risulta l+n=0. Le condizioni richieste sul vettore geometrico v danno allora 2=ρ+l, 1=m, 1=ρ+n, l+n=0. Risolvendo il sistema nelle incognite ρ, l, m ed n, si ha immediatamente ρ=3/2, l=1/2, m=1, n=-1/2 e quindi i vettori geometrici richiesti sono v′=(3/2)(i+k) e v″=(1/2)i+j-(1/2)k.

(e) Parametri direttori di una retta (non orientata) perpendicolare al piano p: $x+z-1=0$ sono, per esempio, i coefficienti di giacitura (1,0,1) di tale piano e quindi i suoi versori direttori sono $(i+k)/\pm\sqrt{2}$. Tenendo presente che la la terza coordinata del versore direttore della retta s deve essere negativa perché tale retta è orientata verso il basso, nell'ultima espressione va scelto il segno -. In definitiva il versore direttore della retta orientata s è: $(i+k)/-\sqrt{2}$. Allora i coseni degli angoli convessi che la retta orientata s forma rispettivamente con l'asse x, con l'asse y e con l'asse z sono $1/-\sqrt{2}$, 0 e $1/-\sqrt{2}$. Pertanto gli angoli convessi che la retta orientata s forma rispettivamente con tali assi sono $(3/4)\pi$, $\pi/2$ e $(3/4)\pi$.

2. <u>Piano euclideo ordinario $\mathbf{E}_2$</u>. RC(O;i,j). Sia assegnata l'applicazione

$$f: \mathbf{E}_2 \rightarrow \mathbf{E}_2$$

di equazioni cartesiane

$$x'=(1/2)x+hy-1, \quad y'=hx-(1/2)y-\sqrt{3},$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali l'applicazione f sia un'affinità di $\mathbf{E}_2$.

(b) Dire quali delle affinità di cui al punto precedente sono isometrie inverse di $\mathbf{E}_2$.

(c) Dire quali delle isometrie inverse di cui al punto (b) sono riflessioni ossia simmetrie ortogonali rispetto ad un asse e scrivere l'equazione cartesiana di tale asse.

(d) Dire quali delle isometrie inverse di cui al punto (b) sono glissoriflessioni.

(e) Per ogni riflessione f di cui al punto (c), determinare l'equazione cartesiana della retta $r'=f(r)$, essendo r l'asse x.

Soluzione

(a) Le equazioni cartesiane di f sono del tipo $X'=AX+B$, essendo $X'={}^t(x',y')$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1/2,h)$ ed $A^{(2)}=(h,-1/2)$, $X={}^t(x,y)$ e $B={}^t(-1,-\sqrt{3})$. Pertanto l'applicazione f è un'affinità di $\mathbf{E}_2$ se e soltanto se la matrice quadrata A ha determinante non nullo. Allora, essendo $\det(A)=-h^2-1/4\neq 0$ $\forall h\in \boldsymbol{R}$, si ha che f è un'affinità $\forall h\in \boldsymbol{R}$.

(b) Un'affinità f di $\mathbf{E}_2$, di cui al punto (a), è un'isometria di $\mathbf{E}_2$ se e soltanto se la matrice A è ortogonale. La condizione di ortogonalità per la matrice A è espressa da ${}^tAA=I$, ossia, stante la simmetria della matrice A, da $A^2=I$. Tale condizione risulta soddisfatta se e soltanto se è $h^2+1/4=1$, ovvero se e soltanto se è $h=\pm\sqrt{3}/2$. Osserviamo che, essendo $\det(A)=-1$ per entrambi i valori di h appena ottenuti, in tutti e due i casi l'isometria f è inversa.

(c) Per sapere per quali valori di h l'isometria inversa f, di cui al punto

(b) è una riflessione, ossia una simmetria ortogonale rispetto ad un asse, verifichiamo per quali valori di h esistono punti fissi o uniti (Teorema di Chasles). Per $h=-\sqrt{3}/2$, equazioni dei punti fissi di f sono: $x=(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y-1$, $y=-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$, ossia $x+(\sqrt{3})y+2=0$, $(\sqrt{3})x+3y+2\sqrt{3}=0$. Tale sistema è equivalente alla sola equazione $x+(\sqrt{3})y+2=0$ e quindi è compatibile, onde esistono punti fissi e di conseguenza l'isometria inversa f è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse. L'asse di simmetria, essendo il luogo dei punti fissi, ha equazione cartesiana $(\sqrt{3})x+3y+2\sqrt{3}=0$. Per $h=\sqrt{3}/2$, equazioni dei punti fissi di f sono $x=(1/2)x+(\sqrt{3}/2)y-1$, $y=(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$, ossia $x-(\sqrt{3})y+2=0$, $(\sqrt{3})x-3y-2\sqrt{3}=0$. L'ultimo sistema è incompatibile perché i ranghi della matrice incompleta e della matrice completa sono diversi, essendo uguali rispettivamente a 1 e a 2. Allora per $h=\sqrt{3}/2$ non esistono punti fissi e quindi l'isometria inversa f non è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

(d) Ricordando che per il Teorema di Chasles un'isometria inversa priva di punti fissi è una glissoriflessione, si ha che l'isometria inversa f corrispondente al valore $\sqrt{3}/2$ del parametro h, essendo priva di punti fissi (come verificato al punto precedente), è una glissoriflessione.

(e) L'applicazione inversa di una riflessione coincide con la riflessione stessa, quindi, essendo $x'=(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y-1$, $y'=-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$ equazioni cartesiane della riflessione f di cui al punto (c), equazioni cartesiane di f^{-1} sono $x=(1/2)x'-(\sqrt{3}/2)y'-1$, $y=-(\sqrt{3}/2)x'-(1/2)y'-\sqrt{3}$. Ma l'asse x ha equazione cartesiana $y=0$ e quindi la retta $r'=f(r)$ ha equazione cartesiana $-(\sqrt{3}/2)x'-(1/2)y'-\sqrt{3}=0$. Tornando a indicare con x e y le incognite, l'ultima equazione diventa $-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}=0$, ovvero $\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}=0$.