

ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2010-2011
Foglio N. 7

1. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbb{R}^3$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\rightarrow V$ definito da

$$F(v)=(x_1-x_2-x_3, -x_1+x_2-x_3, -x_1-x_2+x_3),$$

essendo $v=(x_1, x_2, x_3)$.

- (a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di V .
- (b) Verificare che F è simmetrico.
- (c) Determinare una base ortonormale B' di V costituita da autovettori rispetto ad F .
- (d) Detta A' la matrice associata ad F rispetto alla base B' , determinare una matrice ortogonale C tale che $A'=C^{-1}AC$.
- (e) Scrivere l'espressione di $F(v)$ rispetto alla base B' .

2. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbb{R}^4$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\rightarrow V$ definito da

$$F(v)=(x_2-x_4, x_1-x_3, -x_2-x_4, -x_1-x_3),$$

essendo $v=(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- (a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di V .
- (b) Verificare che F è simmetrico.
- (c) Determinare una base ortonormale B' di V costituita da autovettori rispetto ad F .
- (d) Detta A' la matrice associata ad F rispetto alla base B' , determinare una matrice ortogonale C tale che $A'=C^{-1}AC$.
- (e) Scrivere l'espressione di $F(v)$ rispetto alla base B' .

3. Spazio vettoriale euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ di dimensione tre. Base ortonormale $B=(v_1, v_2, v_3)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\rightarrow V$, definito da

$$F(v)=v-\langle v, u \rangle u,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, $u=v_1+v_2+v_3$.

- (a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.
- (b) Determinare una base ortonormale B' di V , costituita da autovettori rispetto ad F .
- (c) Scrivere l'espressione di $F(v)$ rispetto a B' .

4. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbb{R}^3$. Sia assegnata la forma quadratica reale $q:V\rightarrow\mathbb{R}$, definita da

$$q(v)=-x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3-x_2^2-4x_2x_3-x_3^2,$$

essendo $v=(x_1, x_2, x_3)$.

- (a) Determinare l'endomorfismo simmetrico $F:V\rightarrow V$ associato a q .
- (b) Determinare una base ortonormale opportuna di V rispetto alla quale q assume forma canonica metrica e scrivere tale forma canonica.
- (c) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q assume forma canonica affine e scrivere tale forma canonica.
- (d) Determinare la segnatura e l'indice di nullità di q .
- (e) Dire di che tipo è q .

5. Piano vettoriale numerico reale $V=\mathbb{R}^2$ dotato dello pseudo-prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito da $\langle v, w \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$, essendo $v=(x_1, x_2)$, $w=(y_1, y_2)$. Verificare che l'endomorfismo $F:V\rightarrow V$, definito da

$$F(v)=((5/4)x_1+(3/4)x_2, (3/4)x_1+(5/4)x_2),$$

è una trasformazione di Lorentz.