Esercitazione di Algebra Lineare - 10/10/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Siano σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in M_2(\mathbb{C})$ le matrici così definite

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tali matrici, note come Matrici di Pauli o Matrici di Spin, hanno un ruolo fondamentale in Meccanica Quantistica.
Verificare che

i) $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ per $i = 1, 2, 3,$

ii) $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$, $[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$, $[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$.

(Il commutatore di due matrici $[A, B]$ è definito come $[A, B] = AB - BA$.)

Esercizio 2

Risolvere le seguenti equazioni a coefficienti in $\mathbb{C}$

$$z + 3i + Re(z)(i + Im(z)^2) = 0; \qquad iz^3 = \bar{z}; \qquad (z - 4i)^5 = 1 + i.$$

Esercizio 3

Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare omogeneo al variare del parametro reale λ

$$\begin{cases} x_1 - 2\lambda x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ 2\lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ -x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + (k+1)x_3 - x_4 = k, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - kx_4 = 0. \end{cases}$$

Esercizio (*)

Trovare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z|^2 < \frac{1}{2}(z^2 + (\bar{z})^2) < \frac{1}{2}|z + \bar{z}| + 1$$

e disegnarlo nel piano di Gauss.

Esercizio (**)

Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare dei parametri reali t, s

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + tx_4 + x_5 = 1, \\ sx_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$