Primo appello di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)
Prof. Barucci e Piccinni
15 febbraio 2012

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**...**Nome**...

1. Si consideri l'equazione $z^3 + 1 = 0$, a coefficienti in $\mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

   $\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = i;\ z_2 = -i, z_3 = -1$

   $\boxed{2}$ Le soluzioni sono $z_1 = z_2 = -i, z_3 = -1$

   $\boxed{\bowtie 3}$ Le soluzioni sono $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -1$

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

2. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:
$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = 0 \\ a"x + b"y + c"z + d" & = 0 \end{cases}$$
e siano $\alpha, \alpha', \alpha"$ i tre piani di $\mathbb{R}^3$ rappresentati ordinatamente dalla prima, seconda e terza equazione. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Se il sistema non ammette soluzioni, i tre piani sono paralleli

   $\boxed{2}$ Se il sistema ammette infinite soluzioni, l'intersezione dei tre piani è una retta

   $\boxed{3}$ Se il sistema ammette un'unica soluzione, i tre piani sono a due a due perpendicolari

   $\boxed{\bowtie 4}$ Nessuna delle precedenti.

3. Sia $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita dalla formula:
$$T(A) = 2(A + A^t),$$
essendo A^t la trasposta di A. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte) [si ricordi che A è simmetrica se $A = A^t$, e antisimmetrica se $A = -A^t$]:

   $\boxed{1}$ il nucleo di T è costituito dalle matrici simmetriche

   $\boxed{\bowtie 2}$ l'immagine di T è costituito dalle matrici simmetriche

   $\boxed{\bowtie 3}$ il nucleo di T è costituito dalle matrici antisimmetriche

   $\boxed{4}$ l'immagine di T è costituito dalle matrici antisimmetriche

   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

Infatti per il punto 3, il nucleo di T è formato dalle matrici $A = (a_{ij})$ tali che $4a_{11}, \dots, 4a_{nn} = 0$ e $2(a_{ij}+a_{ji}) = 0$ (ovvero $a_{ij} = -a_{ji}$) per ogni $i \neq j$

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ il piano $\alpha : x + y + z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ tutte le rette parallele ad α hanno parametri direttori $(1, 1, 1)$

$\boxed{\bowtie 2}$ tutte le rette perpendicolari ad α hanno parametri direttori $(1, 1, 1)$

$\boxed{\bowtie 3}$ α contiene la retta $r : x - 2y + z + 1 = 0, 2x + 5y + 2z - 1 = 0$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Infatti per 2 basta ricordare che i parametri di giacitura del piano α, $(1, 1, 1)$, rappresentano le coordinate di un vettore perpendicolare al piano. Per 3, si osservi che il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x - 2y + z + 1 & = 0 \\ 2x + 5y + 2z - 1 & = 0 \end{cases}$$

è un sistema compatibile con una matrice dei coefficienti di rango 2, quindi le soluzioni formano un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - 2 = 1$, che è proprio la retta r.

5. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali $U = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \mathrm{Span}\,(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$, dove $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 2, 2, -1), \vec{v}_3 = (-1, 1, -1, 0), \vec{v}_4 = (3, 1, 4, 0)$, Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ U e W hanno dimensione 2

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

$\boxed{\bowtie 3}$ Il sottospazio somma $U + W$ ha dimensione 3

$\boxed{\bowtie 4}$ Il sottospazio intersezione $U \cap W$ ha dimensione 1

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

Infatti la matrice che ha per colonne i quattro vettori dati ha rango 3.

6. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Le matrici A e B non sono invertibli.

$\boxed{2}$ A e B sono invertibli e $B = A^{-1}$

$\boxed{3}$ A e B sono invertibli e $B = -A^{-1}$

$\boxed{\bowtie 4}$ A e B sono invertibli e $B \neq \pm A^{-1}$

Basta calcolare A^{-1}, che risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e siano

$$A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \end{pmatrix}, \quad A_{\pi} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad A_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{pmatrix}.$$

le matrici ottenute da A mediante una “rotazione in senso orario” risp. di $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ “attorno all'elemento centrale” a_{22}. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

$\boxed{1}$ $\det A = \det A_{\frac{\pi}{2}} = \det A_{\pi} = \det A_{\frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{\bowtie 2}$ $\det A = -\det A_{\frac{\pi}{2}} = \det A_{\pi} = -\det A_{\frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{3}$ $\det A = \det A_{\frac{\pi}{2}} = -\det A_{\pi} = -\det A_{\frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Infatti una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante e scambiando due righe o due colonne i l determinante cambia segno.

8. Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo uno spazio vettoriale complesso $V = V^n_{\mathbb{C}}$, e si assuma che il polinomio caratteristico di T ammetta $n-2$ zeri distinti $\lambda_1, \dots \lambda_{n-2}$ e uno zero λ, distinto dai precedenti e di molteplicità algebrica 2. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T è diagonalizzabile se e solo se λ è reale

$\boxed{\bowtie 2}$ T è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio di λ ha dimensione 2

$\boxed{3}$ T è sempre diagonalizzabile

$\boxed{4}$ Nessuno dei precedenti

9. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ tale che tr $A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 7$, e $\det A = 8$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

$\boxed{1}$ Gli autovalori di A sono tutti reali, ma non sono individuabili dai dati assegnati

$\boxed{2}$ Solo un autovalore di A e reale, e gli altri due non lo sono

$\boxed{\bowtie 3}$ Gli autovalori di A possono essere reali o non reali, ma non sono individuati dai dati assegnati

$\boxed{4}$ Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

10. Sia

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

l'operatore lineare tale che $T((-1,0)) = (-3,-2)$ e $T((1,1)) = (5,-3)$. Indicare tra le matrici seguenti quella che rappresenta T rispetto alla base $\{(-1,0),(1,1)\}$:

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{\bowtie 4}$ $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Indicare tra le stesse matrici seguenti quella che rappresenta T rispetto alla base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$:

$\boxed{\bowtie 1'}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{2'}$ $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{3'}$ $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{4'}$ $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 5}$ T è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$

$\boxed{6}$ T conserva il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$

$\boxed{7}$ nessuna delle due precedenti

Infatti per i vettori della base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (-1,0), \vec{v}_2 = (1,1)\}$, si ha $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$ e $T(\vec{v}_2) = -8\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$.
La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica è $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è $C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.
Le risposte ai punti 5 e 6 dipendono dal fatto che $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica ma non ortogonale.