Esercitazione di Algebra Lineare - 16/10/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Stabilire se i seguenti sistemi lineari non omogenei ammettono soluzione e in caso affermativo determinarle:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 17. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2

Per quali $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è simmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 3t-2 & -1 \\ t^2 & 3 & t^2+4 \\ -1 & 4t & 1 \end{pmatrix}.$$

Provare che $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$:

i) $A + A^t$ è simmetrica;

ii) $A - A^t$ è antisimmetrica.

Dedurre che ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si può scrivere come $A = A_s + A_{as}$ dove $A_s = \frac{1}{2}\big(A^t + A\big)$, $A_{as} = \frac{1}{2}\big(A - A^t\big)$.

Esercizio 3

i) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è idempotente[1]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Dimostare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora A e B sono idempotenti.

[1] Una matrice A è idempotente se $A^2 = A$.

Esercizio 4
Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

determinare se A è ortogonale [2] e se A è invertibile.

Esercizio 5
Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici sono invertibili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio (*)
Dimostrare che il gruppo delle matrici ortogonali $O(2)$ è costituito da tutte e sole le matrici:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

[2]Ricordiamo che A è ortogonale se e solo se $A^tA = \mathbb{1} = AA^t$. L'insieme delle matrici ortogonali è denotato con $O(n)$. Per definizione $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$.