Esercitazione di Algebra Lineare - 23/10/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Data la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+2i \\ 3+3i & 7+7i \end{pmatrix},$$

calcolare la sua inversa A^{-1}.

Esercizio 2

i)Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di k la matrice A è invertibile. Calcolare la matrice inversa di A per $k = -1$.

ii) Sia $B \in M_3(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile. Per tali valori di k trovati, determinare l'inversa.

Esercizio 3

Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema ammette una sola soluzione. Trovarla con il Metodo di Cramer.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ kx_1 + x_2 + x_3 = k+1, \\ x_1 + kx_2 - kx_3 = -2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Dire se $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ nei seguenti due casi:

i)

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (2, 1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 2);$$
$$w_1 = (1, 2, 2), \quad w_2 = (2, 2, 3), \quad w_3 = (0, 2, 1).$$

ii) Discutere, al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$, la dipendenza o indipendenza lineare dei tre vettori u_1, u_2, u_3 nei seguenti due casi:

$$u_1 = (2, s, 1), \quad u_2 = (s, -1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1);$$
$$u_1 = (1, s, 1), \quad u_2 = (s, -1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1).$$

Esercizio 5

i) Stabilire se le seguenti terne di vettori sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0, 0), \quad v_3 = (2, -1, 0, 0);$$
$$w_1 = (1, 0, 0, 0), \quad w_2 = (1, 1, 0, 0), \quad w_3 = (0, 1, 2, 1).$$

ii) Verificare che

$$u_1 = (-1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1), \quad u_4 = (1, 1, 1),$$

è un sistema di generatori ma non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6

Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_3(\mathbb{R})$ delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Siano S e T i sottoinsiemi di V costituiti, rispettivamente, dalle matrici simmetriche (cioè tali che $A^t = A$) e dalle matrici antisimmetriche (cioè tali che $A^t = -A$).

i) Dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di V e determinarne una base e la dimensione.

ii) Dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di V e determinarne una base e la dimensione.