Esercitazione di Algebra Lineare - 27/11/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Si consideri nello spazio affine ordinario $RA(Oxyz)$ il piano π di equazione

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0.$$

Fissato il punto $C = (c_1, c_2, c_3)$ e denotato con $P' = \sigma_C(P)$ il punto simmetrico di P rispetto a C (cioè tale che $\vec{PC} = \vec{CP'}$), scrivere l'equazione cartesiana del piano $\sigma_C(\pi)$ simmetrico di π rispetto al punto C.

Esercizio 2

Si consideri nel piano affine $RA(Oxy)$ la retta r di equazione $r : x + y = 1$ e il triangolo T di vertici $A . (1, 1)$, $B : (4, 0)$ e $C : (3, 5)$. Determinare il simmetrico di T rispetto alla retta r nella direzione ortogonale ad r.

Esercizio 3

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P_0 : (1, -1, 0)$, il piano $p : x - y + 2z = 1$ e le due rette

$$r_1 : \begin{cases} y = 0, \\ 2x - z = 0, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 0, \\ 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi

i) I piani per P_0 normali a p.

ii) Il piano per P_0 normale a p e parallelo a r_1.

ii) Il piano contentente r_2 e normale a p.

Esercizio 4

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P : (0, 0, 1)$ e il piano $\pi : \quad 2z - x = 0$.

i) Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.

ii) Determinare la proiezione ortogonale M di P su π lungo la direzione $V = \langle \mathbf{v} = (1, 1, -1) \rangle$..

iii) Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.

iv) Detto R il simmetrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.

Esercizio (*)

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2, \\ x + z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

i) Verificare che le rette r, s sono sghembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare inoltre i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

ii) Dato $A : (1, 0, 0)$, scrivere l'equazione della retta h passante per A e incidente sia r che s.

iii) Scrivere l'equazione del cilindro avente la retta s come asse e tangente alla retta r. Determinare i punti P e Q di infersezione tra il cilindro e la retta h.

iv) Determinare il volume del tetraedro $SPQR$.