Esercitazione di Algebra Lineare - 30/10/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1
Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \text{t.c.} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x che hanno grado al più 3.

i) Determinare una base e la dimensione di V.

Stabilire se i seguenti sono sottospazi vettoriali di V. Se lo sono, trovare una base e la dimensione.

i) $S = \{p(x) \in V \quad \text{t.c.} \quad p(0) = 0\}$.

ii) $T = \{p(x) \in V \quad \text{t.c.} \quad p(1) = 1\}$.

iiii) $U = \{p(x) \in V \quad \text{t.c.} \quad p(2) = p'(2)\}$ (dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$, pensata come funzione di x).

Esercizio 2
Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ rappresentati rispettivamente dai seguenti sistemi lineari

$$U := \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad V := \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U + V$.

Esercizio 3
Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ che ammettono le seguenti rappresentazioni cartesiane:

$$U := \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases} \qquad V := \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U \cap V$, $U + V$.

ii) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U + V$.

iii) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, contenente U ma non V.

iv) Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = \mathrm{Span}((1, 1 + h, 0), (1, h, 1))$. Determinare i valori di h per cui si ha $W_h = U + V$.

Esercizio 4 Sia V lo spazio vettoriale reale di dimensione 4. Base $B_V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Siano $u_1 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4$, $u_2 = v_1 + v_2$. Si consideri il sottospazio $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$.

i) Determinare una base B_U di U.

ii) Considerato il vettore $u(k) = 2v_1 + kv_2 - v_3 + v_4$, $k \in \mathbb{R}$, si determini il valore del parametro k per cui $u(k) \in U$.

iii) Completare la base B_U in una base di V.

Esercizio 5
Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_3(\mathbb{R})$ delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Siano S e T i sottoinsiemi di V costituiti, rispettivamente, dalle matrici simmetriche (cioè tali che $A^t = A$) e dalle matrici antisimmetriche (cioè tali che $A^t = -A$). Dimostrare che V è somma diretta di S e T.