Esercitazione di Algebra Lineare - 4/12/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$T(1,-2,1) = (2,1), \quad T(1,0,0) = (-1,2), \quad T(0,1,0) = (-1,0).$$

i) Determinare la dimensione dell'immagine di T.

ii) Determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$) del nucleo di T.

Esercizio 2

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato da

$$v_1 = (1,1,0,1), \quad v_2 = (1,-2,0,0), \quad v_3 = (1,0,-1,2).$$

i) Determinare una base ortonormale di W.

ii) Determinare una base del complemento ortogonale di W.

Esercizio 3

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2, \\ x + z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

i) Verificare che le rette r, s sono sghembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare inoltre i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

ii) Dato $A : (1,0,0)$, scrivere l'equazione della retta h passante per A e incidente sia r che s.

iii) Dati i punti $P = \left(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 1+\sqrt{6}, \frac{3+3\sqrt{6}}{4}\right)$ e $Q = \left(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 1-\sqrt{6}, \frac{3-3\sqrt{6}}{4}\right)$ determinare il volume del tetraedro $SPQR$.

Esercizio 4

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il piano $\mathbf{q} : x = 0$ e i tre punti $A = (-1,0,0)$, $B = (2,2,-1)$, $C = (-1,1,1)$.

i) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathbf{p}$ contenente i tre punti.

ii) Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $\mathcal{T}$ di veritci A, B C.

iii) Determinare la proiezione ortogonale $\mathcal{T}'$ del triangolo $\mathcal{T}$ sul piano $\mathbf{q}$.

iv) Calcolare l'area $\mathcal{A}'$ del triangolo $\mathcal{T}'$.

v) Determinare il coseno dell'angolo convesso θ tra i piani $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Verificare inoltre che $\mathcal{A}' = \mathcal{A}|\cos\theta|$.

vi) Sia $r = \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$, calcolare la distanza tra la retta r e il vertice A, A' rispettivamente.

Esercizio 5

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.0.1}$$

i) Determinare la dimensione e una base per il nucleo.

ii) Verificare che esiste un punto fisso per la trasformazione lineare T (i.e. $\exists\, v$ t.c. $T(v) = v$).

iii) Esiste un vettore non nullo v che viene trasformato nel suo opposto dall'applicazione T?

iv) Esiste un vettore non nullo v che viene trasformato nel suo triplo dall'applicazione T?