Esercitazione di Algebra Lineare - 9/12/2013

Paolo Piccinni - Alessia Nota

Esercizio 1

Consideriamo le matrici di Pauli così definite

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna delle matrici σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in M_2(\mathbb{C})$

i) calcolare il polinomio caratteristico di σ_k, $k = 1, 2, 3$, ovvero

$$p(\lambda) = det(\sigma_k - \lambda I);$$

ii) determinare gli autovalori di σ_k che sono le radici del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni dell'equazione $det(\sigma_k - \lambda I) = 0$, con le loro molteplicità algebriche;

iii) per ciascun autovalore λ determinare l'autospazio $E(\lambda)$ relativo, cioè l'insieme degli autovettori relativi a λ, che sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$(\sigma_k - \lambda I) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e determinarne la dimensione;

v) le molteplicità algebriche e le molteplicità geometriche coincidono per ogni autovalore? Cosa possiamo concludere sulla diagonalizzabilità di σ_k?

Se σ_k, $k = 1, 2, 3$ è diagonalizzabile determinare una base di autovettori.

Esercizio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.0.1}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico di A, ovvero

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

ii) Determinare gli autovalori di T che sono le radici del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni dell'equazione $det(A - \lambda I) = 0$, con le loro molteplicità algebriche.

iii) Per ciascun autovalore λ di T determinare l'autospazio $E(\lambda)$ relativo, cioè l'insieme degli autovettori relativi a λ, che sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iv) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, cioè le dimensioni degli autospazi relativi.

v) Le molteplicità algebriche e le molteplicità geometriche coincidono per ogni autovalore? Cosa possiamo concludere sulla diagonalizzabilità di A, ovvero dell'applicazione T?

Se A è diagonalizzabile

vi) Determinare una base formata da autovettori di T.

Hint: Ci possiamo avvalere delle informazioni ricavate dall'esercizio 5 del foglio del 4/12/13 per risolvere parte dell'esercizio?

Esercizio 3

Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3, 5x_2 + 6x_3, -3x_2 - 4x_3).$$

i) Scrivere la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di $|RR^3$.

ii) Calcolare il polinomio caratteristico di A, ovvero

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

iii) Determinare gli autovalori di F che sono le radici del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni dell'equazione $det(A - \lambda I) = 0$, con le loro molteplicità algebriche.

iv) Per ciascun autovalore λ di F determinare l'autospazio $E(\lambda)$ relativo, cioè l'insieme degli autovettori relativi a λ, che sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

v) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, cioè le dimensioni degli autospazi relativi.

vi) Le molteplicità algebriche e le molteplicità geometriche coincidono per ogni autovalore? Cosa possiamo concludere sulla diagonalizzabilità di A, ovvero dell'applicazione F?

Se A è diagonalizzabile

vii) Determinare una base formata da autovettori di F.

viii) Scrivere la matrice C di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base formata da autovettori di F.

ix) Calcolare la matrice inversa C^{-1}.

x) Scrivere A come coniugata di una matrice diagonale.