Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni). Prova scritta del 10.2.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome, numero di matricola e appello prescelto per l' orale su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Sia r la retta passante per i punti $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 2, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ e sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x+z &= -2 \end{cases}$$

i) Si scrivano equazioni parametriche (vettoriali o scalari) di r e di s.

ii) Si determini la posizione reciproca di r e di s, specificando se sono parallele, incidenti o sghembe.

iii) Si trovi la retta h passante per $C = (1, 0, 0)$ e ortogonale sia a r che a s.

iv) Si determini la distanza fra il punto $D = (1, 5, -2)$ e la retta h.

Esercizio 2. Si considerino, nello spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3, i vettori

$$p_1(t) = 1 + t^2 + 2t^3, \quad p_2(t) = 2t - t^2 + t^3, \quad p_3(t) = 1 - t + t^2.$$

i) Si dica (motivando la risposta) se $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono linearmente indipendenti.

ii) Si dica (motivando la risposta) se il polinomio

$$q(t) = 1 - t + 2t^2 + 3t^3$$

appartiene al sottospazio W generato da $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla formula

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

i) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.

ii) Si determini una base di $ker\ f$ e di $im\ f$.

iii) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo determinare una base di autovettori.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare gli autovalori e gli indici di positività e negatività della matrice simmetrica A.

Si denoti poi con

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la forma bilineare simmetrica rappresentata da A.

ii) Stabilire quali tra i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono *isotropi* rispetto a b, ovvero tali che $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$:

$$\vec{v}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1, \sqrt{2}), \quad \vec{v}_2 = (\sqrt{2}, -1, -1, \sqrt{2}), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, 0, 1).$$