Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni)
Soluzioni della prova scritta del 10.2.2014

Esercizio 1. Sia r la retta passante per i punti $A = (0,1,0)$ e $B = (1,2,1)$ di $\mathbb{R}^3$ e sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ x+z & = & -2 \end{cases}$$

i) Si scrivano equazioni parametriche (vettoriali o scalari) di r e di s.

ii) Si determini la posizione reciproca di r e di s, specificando se sono parallele, incidenti o sghembe.

iii) Si trovi la retta h passante per $C = (1,0,0)$ e ortogonale sia a r che a s.

iv) Si determini la distanza fra il punto $D = (1,5,-2)$ e la retta h.

Soluzione. i) Il vettore $\vec{AB} = (1,1,1)$ è vettore direttore di r. Un vettore direttore $\vec{s}$ di s ha invece per componenti i minori a segni alterni della matrice dei coefficienti delle sue equazioni cartesiane. Dunque $\vec{s} = (1,0,-1)$. Da ciò le equazioni parametriche delle due rette

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Sostituendo le equazioni parametriche di r nelle equazioni cartesiane assegnate di s si ha subito: $1+t=0, t+t+2=0$, con evidente soluzione $t=-1$. Pertanto risulta che $A = (-1,0,-1) = r \cap s$, e le due rette risultano pertanto incidenti nel punto A.

iii) La retta h, passando per il punto C avrà equazioni parametriche del tipo:

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

e i suoi parametri direttori (l,m,n), per la perpendicolarità con r e con s, devono soddisfare le condizioni: $l+m+n=0$, $l-n=0$. Una possibile soluzione non nulla è $(l,m,n) = (-1,2,-1)$, da cui le equazioni:

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

iv) Il piano π passante per D e perpendicolare alla retta h risulta $\pi : -(x-1)+2(y-5)-(z+2) = 0$, e sostituendo in tale equazione le equazioni parametriche della retta h risulta subito $v = 2$. Dunque $\pi \cap h = D^{\perp} = (-1,4,-2)$ è il punto piede della perpendicolare da D a h, e la distanza risulta:

$$d(D,h) = d(D,D^{\perp}) = \sqrt{5}.$$

Esercizio 2. Si considerino, nello spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3, i vettori

$$p_1(t) = 1 + t^2 + 2t^3, \quad p_2(t) = 2t - t^2 + t^3, \quad p_3(t) = 1 - t + t^2.$$

i) Si dica (motivando la risposta) se $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono linearmente indipendenti.

ii) Si dica (motivando la risposta) se il polinomio

$$q(t) = 1 - t + 2t^2 + 3t^3$$

appartiene al sottospazio W generato da $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$.

Soluzione. i) Le componenti di $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ nella base canonica $(1, t, t^2, t^3)$ di V formano la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa ha rango 3 (p. es. il "primo" minore di ordine 3 è non nullo), e pertanto i tre polinomi sono linearmente indipendenti.

ii) Per rispondere, si deve vedere se esistono coefficienti (a_1, a_2, a_3) tali che risulti

$$q(t) = a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t) + a_3 p_3(t).$$

Confrontando i coefficienti dei polinomi a destra e a sinistra di tale uguaglianza si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_1 & & +a_3 & = & 1 \\ & +2a_2 & -a_3 & = & -1 \\ a_1 & -a_2 & +a_3 & = & 2 \\ 2a_1 & +a_2 & & = & 3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è la trasposta di A, ed ha pertanto rango 3. La matrice completa risulta invece

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

che p.es. per riduzione a scala si vede avere anche rango 3. Dunque vi è una terna (a_1, a_2, a_3) soluzione del sistema. Risolvendo si ottiene $(a_1, a_2, a_3) = (2, -1, -1)$. Pertanto:

$$q(t) = 2p_1(t) - p_2(t) - p_3(t).$$

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla formula

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

i) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.

ii) Si determini una base di $ker\ f$ e di $im\ f$.

iii) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo determinare una base di autovettori.

Soluzione. i) La matrice appare già implicitamente nella definizione di f:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

ii) Una base per $ker\ f$ è data da una base per le soluzioni del sistema lineare omogeneo che ha A come matrice dei coefficienti. Poiché la terza riga di A risulta la differenza tra la seconda e il doppio della prima, il rango di A è 2, e $ker\ f$ ha dimensione $3-2=1$. Le soluzioni non nulle di tale sistema omogeneo sono proporzionali ai minori a segni alterni della matrice costituita dalle prime due righe di A. Tali minori sono le componenti di un vettore base di $ker\ f$: dunque $\vec{v}_1 = (1,5,2)$ è base di $ker\ f$. Invece una base di $im\ f$ è data da due colonne linearmente indipendenti di A, p, es. le prime due. Dunque $\vec{w}_1 = (1,2,0), \vec{w}_2 = (1,0,-2)$ costituiscono una base di $im\ f$

iii) Il polinomio caratteristico di A risulta

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\lambda(\lambda+5),$$

evidenziando i tre autovalori distinti $-5, 0, 1$ e dunque la diagonalizzabilità di f. Un autovettore di $\lambda = 0$ è già stato trovato, ed è $\vec{v}_1 = (1,5,-2)$, generatore del nucleo. Gli altri due autovettori, di $\lambda = 1$ e di $\lambda = -5$ si ottengono scrivendo i rispettivi sistemi omogenei, le cui soluzioni sono ordinatamente generate dai vettori $\vec{v}_2 = (2,3,-1)$ e $\vec{v}_3 = (-1,0,2)$. Dunque $\vec{v}_1 = (1,5,-2)$, $\vec{v}_2 = (2,3,-1)$ e $\vec{v}_3 = (-1,0,2)$ costituiscono una base di autovettori di f.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare gli autovalori e gli indici di positività e negatività della matrice simmetrica A.

Si denoti poi con

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la forma bilineare simmetrica rappresentata da A.

ii) Stabilire quali tra i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono *isotropi* rispetto a b, ovvero tali che $b(\vec{v},\vec{v}) = 0$:

$$\vec{v}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1, \sqrt{2}), \quad \vec{v}_2 = (\sqrt{2}, -1, -1, \sqrt{2}), \quad \vec{v}_3 = (1,0,0,1).$$

Soluzione. i) Ancora polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0- & -2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4),$$

e dunque i quattro autovalori distinti $\lambda = \pm 1, \pm 2$. Dunque due autovalori positivi e due negativi, ovvero indici di positività e di negatività entrambi 2.

ii) In termini della matrice A la condizione che caratterizza i vettori $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ isotopi è la seguente:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)A(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = 0,$$

ovvero più esplicitamente:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Tale condizione è subito visto essere soddisfatta da $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{v}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1\sqrt{2})$, e da $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{v}_2 = (\sqrt{2}, -1, -1\sqrt{2})$, ma non da $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{v}_3 = (1, 0, 0, 1)$. Dunque $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono isotropi rispetto a b, mentre non lo è $\vec{v}_3$.