Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni). Prova scritta del 10.9.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome, numero di matricola e appello prescelto per l' orale su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ passante per i punti $A = (1,1,0)$ e $P_0 = (-1,-1,-2)$ e sia s quella definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +1 = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +2 = 0 \end{cases}$$

a) Si studi la posizione reciproca di r e s.

b) Si scriva un'equazione cartesiana per il piano π che contiene r e s.

c) Si scrivano equazioni parametriche della retta h perpendicolare a π e passante per $C = (1,1,-1)$.

d) Si scriva un'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e a s e passante per C.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca se A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti.

b) Si stabilisca se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.

c) Si stabilisca se la matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ l'operatore lineare

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2).$$

a) Si scriva la matrice A che rappresenta f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Si determini una base di $\ker f$.

c) Si scriva la matrice B che rappresenta f nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.

d) Si stabilisca se f è diagonalizzabile. In caso affermativo si determini una base di R^3 formata da autovettori di f.

Esercizio 4. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare simmetrica

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_4.$$

a) Si scriva la matrice A che rappresenta g nella base canonica di $\mathbb{R}^4$.
b) Si determinino gli indici di g
c) Si scriva la matrice ortogonale N che diagonalizza A.