Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni)
Soluzioni della prova scritta del 10.9.2014

Esercizio 1. Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ passante per i punti $A = (1, 1, 0)$ e $P_0 = (-1, -1, -2)$ e sia s quella definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +1 = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +2 = 0 \end{cases}$$

a) Si studi la posizione reciproca di r e s.
b) Si scriva un'equazione cartesiana per il piano π che contiene r e s.
c) Si scrivano equazioni parametriche della retta h perpendicolare a π e passante per $C = (1, 1, -1)$.
d) Si scriva un'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e a s e passante per C.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca se A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti.
b) Si stabilisca se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.
c) Si stabilisca se la matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ l'operatore lineare

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2).$$

a) Si scriva la matrice A che rappresenta f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
b) Si determini una base di $\ker f$.
c) Si scriva la matrice B che rappresenta f nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.
d) Si stabilisca se f è diagonalizzabile. In caso affermativo si determini una base di R^3 formata da autovettori di f.

Esercizio 4. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare simmetrica

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_4.$$

a) Si scriva la matrice A che rappresenta g nella base canonica di $\mathbb{R}^4$.
b) Si determinino gli indici di g

c) Si scriva la matrice ortogonale N che diagonalizza A.

Soluzione 1.
a) Risulta $\vec{AB} = (-2, -2, -2)$ e le equazioni parametriche di r sono pertanto $x_1 = 1 - 2t, x_2 = 1-2t, x_3 = -2t$. D'altra parte dalle equazioni cartesiane della retta s si hanno subito i suoi parametri direttori $(-3, -3, -3)$ e pertanto, essendo p. es. $A \notin s$, le rette sono parallele e distinte.
b) L'equazione del piano π si ha facilmente scrivendo l'equazione del fascio di piani di asse s e imponendo il passaggio per il punto A. Si ottiene così $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 = 0$.
c) La retta h ha per parametri direttori $(1, -2, 1)$, parametri di giacitura di π. Dunque $h : x_1 = 1 + t, x_2 = 1 - 2t, x_3 = -1 + t$.
d) Infine α ha come parametri di giacitura $(1, 1, 1)$, parametri direttoti di r e di s. Dunque $\alpha : x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.

Soluzione 2.
a) Scrivendo gli elementi delle quattro matrici come componenti di quattro vettori in $\mathbb{R}^4$, si verifica facilmente l'eventuale indipendenza lineare, mediante eliminazione di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

e le quattro matrici risultano linearmente dipendenti.
b) Risulta facilmente (risolvendo un sistema lineare) $B = 2A_1 + A_2 - A_3$, dunque B appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.
c) Risulta invece $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, e pertanto I non appartiene al sottospazio generato da A_1, A_2, A_3, A_4.

Soluzione 3.
a) +b) Dalla definizione di f si ha subito
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice con solo le prime due righe linearmente indipendenti. Pertanto $\ker f$ ha equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_2 + 2x_3 = 0$. Dunque $\ker f$ è la retta vettoriale generata da $(1, 2, 1)$.
c) Risulta:

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Il polinomio caratteristico di A (e di B) risulta $(t+1)t(1-t)$, ca cui i tre autovalori distinti $t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = -1$. Ne segue che f è diagonalizzabile. Rispettivi autovettori sono:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione 4.

a) Dalla definizione di g si ha subito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Il polinomio caratteristico di A risulta $(1-t)t(-t+2)(t+1)$, e dagli autovalori $t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 2, t_4 = -1$ si deducono gli indici $i_+ = 2, i_- = 1, i_0 = 1$.

c) Autovettori dei quattro autovalori sono, nell'ordine, i vettori (necessariamente a due a due ortogonali)

$$\vec{v}_1 = (0,1,1,0), \vec{v}_2 = (1,0,0,1), \vec{v}_3 = (1,0,0,-1), \vec{v}_4 = (0,1,-1,0).$$

Da essi, normalizzando, di ha la matrice ortogonale

$$N == \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$