Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni). Prova scritta del 18.6.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome, numero di matricola e appello prescelto per l' orale su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Siano r e s le rette dello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$ definite dalle seguenti equazioni, rispettivamente parametriche e cartesiane:

$$r: \begin{cases} x_1 &= 2+t \\ x_2 &= 1-t \\ x_3 &= t \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 1 &= 0 \end{cases}$$

i) Si verifichi che r e s sono complanari, e si determini un'equazione cartesiana del piano π che la contiene.

ii) Si scrivano equazioni parametriche della retta h perpendicolare al piano π e passante per il punto $C = (1, 2, -1)$.

iii) Si esprima il vettore $\vec{v} = (3, 1, -2)$ come somma di due vettori componenti $\vec{v}_\pi$ e $\vec{v}_h$, rispettivamente paralleli al piano π e alla retta h.

iv) Determinare i prodotti scalari $< \vec{v}, \vec{v}_\pi >$ e $< \vec{v}, \vec{v}_h >$.

Esercizio 2. Si consideri, nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$, l'operatore lineare f definito da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3).$$

i) Si determini la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R^3}$ (di partenza e di arrivo).

ii) Si determini la matrice B che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbf{R^3}$ (di partenza e di arrivo).

iii) Si determinino basi dei sottospazi vettoriali *ker* f e *im* f di $\mathbf{R^3}$.

Esercizio 3.

i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{pmatrix} i & t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Sostituendo $t = -i$ si determini una matrice non singolare N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare $g : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definita da:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

i) Si verifichi che b è simmetrica.

ii) Si scriva la matrice A associata a b nella base canonica di $\mathbf{R}^4$.

iii) Si determinino gli indici di positività e di negatività di b.

iv) Si determini una matrice ortogonale U tale che ${}^tUAU$ sia diagonale.