Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni)
Soluzioni della prova scritta del 18.6.2014

Esercizio 1. Siano r e s le rette dello spazio euclideo $\mathbf{E^3}$ definite dalle seguenti equazioni, rispettivamente parametriche e cartesiane:

$$r : \begin{cases} x_1 = 2+t \\ x_2 = 1-t \\ x_3 = t \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

i) Si verifichi che r e s sono complanari, e si determini un'equazione cartesiana del piano π che la contiene.

ii) Si scrivano equazioni parametriche della retta h perpendicolare al piano π e passante per il punto $C = (1, 2, -1)$.

iii) Si esprima il vettore $\vec{v} = (3, 1, -2)$ come somma di due vettori componenti $\vec{v}_\pi$ e $\vec{v}_h$, rispettivamente paralleli al piano π e alla retta h.

iv) Determinare i prodotti scalari $< \vec{v}, \vec{v}_\pi >$ e $< \vec{v}, \vec{v}_h >$.

Soluzione. i) Sostituendo le equazioni parametriche di r nelle equazioni cartesiane di s si ha subito il sistema $2 + t + t = 0, 1 - t + 3t + 1 = 0$, con soluzione $t = -1$. Le due rette sono dunque incidenti nel punto $C = (1, 2, -1)$. Il piano π che le contiene appartiene al fascio di piani F_s : $\lambda(x_1 + x_3) + \mu(x_2 + 3x_3 + 1) = 0$ di asse s, e i relativi parametri λ, μ si ottengono per sostituzione nelle (x_1, x_2, x_3) delle coordinate di un punto di r diverso da C. P. es. scegliendo il punto $(2, 1, 0) \in r$ si ha $2\lambda + 2\mu = 0$ e dunque p.es. $(\lambda, \mu) = (1, -1)$. Il piano π è dunque $x_1 - x_2 - 2x_3 - 1 = 0$.

ii) I parametri direttori di h sono uguali ai parametri di giacitura di π, e sono quindi $(1, -1, -2)$. Le equazioni parametriche di h sono dunque

$$h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

iii) Nella decomposizione richiesta $\vec{v} = (3, 1, -2) = \vec{v}_\pi + \vec{v}_h$ è dunque $\vec{v}_h = t(1, -1, -2)$ (per qualche t) e pertanto $\vec{v}_\pi$ risulterà per opportuno t del tipo $(3 - t, 1 + t, -2 + 2t)$. Il parallelismo di quest'ultimo vettore con il piano π fornisce la condizione $1(3 - t) - 1(1 + t) - 2(-2 + 2t) = 0$, da cui $t = 1$. Pertanto $\vec{v}_\pi = (2, 2, 0)$ e $\vec{v}_h = (1, -1, -2)$.

iv) I prodotti scalari richiesti sono dunque

$$< \vec{v}, \vec{v}_\pi >= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 = 8, \qquad < \vec{v}, \vec{v}_h >= 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) = 6.$$

Esercizio 2. Si consideri, nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$, l'operatore lineare f definito da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3).$$

i) Si determini la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R^3}$ (di partenza e di arrivo).

ii) Si determini la matrice B che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbf{R^3}$ (di partenza e di arrivo).

iii) Si determinino basi dei sottospazi vettoriali $ker\ f$ e $im\ f$ di $\mathbf{R^3}$.

Soluzione. i) Risulta

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Per rispondere, si osservi che

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$F\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice richiesta è quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Una base di ker f è data da una base di soluzioni del sistema lineare omogeneo $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, ovvero dal vettore $(1, 1, 1)$. Una base di im f è invece data da due colonne arbitrarie della matrice A, e quindi p. es. dai due vettori $(1, 0, 2)$ e $(0, -1, 1)$.

Esercizio 3.

i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{pmatrix} i & t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Sostituendo $t = -i$ si determini una matrice non singolare N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale.

Soluzione. i) Il polinomio caratteristico di A risulta

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} i - \lambda & t & 0 \\ 0 & t - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (i - \lambda)(t - \lambda)(2 - \lambda),$$

evidenziando gli autovalori $i, t, 2$. Dunque se $t \neq i, 2$, la matrice A ha tre autovalori distinti ed è pertanto diagonalizzabile. Nel caso $t = 2$ l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2 e anche (come subito si vede) molteplicità geometrica 2. Quindi anche per $t = 2$ la matrice A è diagonalizzabile. Invece per $t = i$ la molteplicità geometrica risulta 1, dunque diversa da quella algebrica, e la matrice A non è diagonalizzabile.

ii) In particolare per $t = -i$ risulta

$$A(-i) = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e la ricerca di una base di autovettori fornisce subito: $(1, 0, 0)$ autovettore dell'autovalore i, $(1, 2, 0)$ autovettore dell'autovalore $-i$, $(0, 0, 1)$ autovettore dell'autovalore 2. Ne segue che una matrice diagonalizzante risulta essere

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare $g : \mathbf{R^4} \times \mathbf{R^4} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

i) Si verifichi che b è simmetrica.

ii) Si scriva la matrice A associata a b nella base canonica di $\mathbf{R^4}$.

iii) Si determinino gli indici di positività e di negatività di b.

iv) Si determini una matrice ortogonale U tale che ${}^tUAU$ sia diagonale.

Soluzione. i) e ii) Si ha subito che $b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x})$ e dunque che b è simmetrica. La matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii) Il suo polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^2$$

mostra che gli autovalori sono tutti positivi, dunque gli indici richiesti sono 4 come indice di positività e 0 come indici di negatività e di nullità.

iv) Una matrice ortogonale diagonalizzante è una matrice che ha per colonne una base ortonormale di autovettori di A. Dall'usuale algoritmo si ricava la seguente matrice

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

in cui la prima e terza colonna costituiscono una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1, e la seconda e quarta colonna sono una base dell'autospazio dell'autovalore 3.