Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni). Prova scritta del 20.1.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome, numero di matricola e appello prescelto per l' orale su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + kz = 2 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

i) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni costituisce una retta affine $r \subset \mathbb{R}^3$.

ii) Determinare, in corrispondenza di tali valori di k, un vettore direttore $\vec{v}_r$ di r.

iii) Scrivere, sempre in corrispondenza di tali valori di k, l'equazione cartesiana del piano π passante per $A = (2, 2, 2)$ e perpendicolare a r.

Esercizio 2. Si considerino, nello spazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$, i sottoinsiemi W_1 e W_2 definiti dalle seguenti condizioni

$$W_1 : \quad a + b + c + d = 0$$

$$W_2 : \quad a - b + c - d = 0$$

i) Verificare che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V.
ii) Determinare una base di W_1 e una base di W_2.
ii) Determinare una base di $W_1 \cap W_2$.
ii) Determinare una base di $W_1 + W_2$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'operatore lineare definito dalle formule

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

i) Determinare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{C}^3$.

iii) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo determinare una base di autovettori.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ il nucleo e l'immagine di A
ii) Stabilire se A è diagonalizzabile per similitudine e se lo è per congruenza.
iii) Determinare gli indici di positività e di negatività di A.