Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni)
Soluzioni della prova scritta del 20.1.2014

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + kz = 2 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

i) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni costituisce una retta affine $r \subset \mathbb{R}^3$.

ii) Determinare, in corrispondenza di tali valori di k, un vettore direttore $\vec{v}_r$ di r.

iii) Scrivere, sempre in corrispondenza di tali valori di k, l'equazione cartesiana del piano π passante per $A = (2, 2, 2)$ e perpendicolare a r.

Soluzione. i) Operando con l'eliminazione di Gauss sulla matrice dei coefficienti e termini noti del sistema lineare si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & k & | & 2 \\ 1 & 1 & k & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 1 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1-k & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1-k & | & 0 \end{pmatrix},$$

e si riconoscono dunque i tre potenziali pivots $1, 1, 1-k$. Quest'ultimo risulta pivot per $k \neq 1$ e per tali valori il sistema, avendo un'unica soluzione, rappresenta un punto. Si ha invece la retta r per $k = 1$.

ii) Sostituendo tale valore $k = 1$ p. es. nell'ultima matrice ottenuta, si ottengono le equazioni cartesiane di $r : x = -z + 2, y = -1$, da cui il vettore direttore $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$.

iii) Il piano π ha dunque coefficienti dell'equazione $(-1, 0, 1)$. Quindi $\pi : -(x - 2) + (z - 2) = -x + z = 0$.

Esercizio 2. Si considerino, nello spazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$, i sottoinsiemi W_1 e W_2 definiti dalle seguenti condizioni

$$W_1 : \quad a + b + c + d = 0$$

$$W_2 : \quad a - b + c - d = 0$$

i) Verificare che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V.

ii) Determinare una base di W_1 e una base di W_2.

ii) Determinare una base di $W_1 \cap W_2$.

ii) Determinare una base di $W_1 + W_2$.

Soluzione. i) Infatti le equazioni di W_1 e di W_2 in V sono lineari omogenee nelle coordinate (a, b, c, d). Questa osservazione assicura che si tratta di sottospazi vettoriali, e che W_1 e W_2 hanno dimensione 3.

ii) Per scrivere basi di W_1 e di W_2 è utile scrivere le loro equazioni nella forma rispettivamente

$$W_1 : \; a = -b - c - d, \qquad W_2 : \; a = b - c + d$$

e osservare che in tale rappresentazione le coordinate (b, c, d) possono riguardarsi come parametri, da cui in entrambi i casi dipende linearmente a. Dunque dalle tre scelte

$$(b, c, d) = (1, 0, 0), \qquad (b, c, d) = (0, 1, 0), \qquad (b, c, d) = (0, 0, 1)$$

si ottiene rispettivamente

$$(a, b, c, d) = (-1, 1, 0, 0), \qquad (a, b, c, d) = (-1, 0, 1, 0), \qquad (a, b, c, d) = (-1, 0, 0, 1)$$

e

$$(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 0), \qquad (a, b, c, d) = (-1, 0, 1, 0), \qquad (a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1),$$

che forniscono ordinatamente la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

del sottospazio vettoriale $W_1 \subset V$ e la base

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

del sottospazio vettoriale $W_2 \subset V$.

iii) Per quanto riguarda $W_1 \cap W_2$, le sue equazioni cartesiane sono date dal sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \end{cases}$$

e le sue equazioni parametriche possono dunque scriversi come $a = -c$ e $b = -d$. Di nuovo, in corrispondenza delle due coppie $(c, d) = (1, 0)$ e $(c, d) = (0, 1)$ si ottiene la base cercata di $W_1 \cap W_2$, data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

iii) Infine poiché W_1 e W_2 hanno dimensione 3 e $W_1 \cap W_2$ ha dimensione 2, dalla formula di Grassmann si ha che $W_1 + W_2$ ha dimensione 4, e dunque $W_1 + W_2 = V$. Una base è dunque data dalla base canonica delle matrici 2×2.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'operatore lineare definito dalle formule

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

i) Determinare $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{C}^3$.

iii) Stabilire se f è diagonalizzabile, e in caso affermativo determinare una base di autovettori.

Soluzione. i) Risulta:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3i\\-1-i\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3i\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-if\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

ii) Ne segue che la matrice associata a f nella base canonica è

$$A=\begin{pmatrix}1&3i&0\\-i&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

iii) Il polinomio caratteristico è dunque

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&3i&0\\-i&-1-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)[(\lambda^2-1)-3]=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2),$$

evidenziando i tre autovalori distinti $1,-2,2$ e dunque la diagonalizzabilità di A. Un autovettore è evidente dalla matrice, ed è $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, autovettore dell'autovalore 1. Per quanto riguarda gli altri due, i sistemi

$$\begin{pmatrix}1&3i\\-i&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}1&3i\\-i&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

hanno soluzioni generate rispettivamente da $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ e da $\begin{pmatrix}3i\\1\end{pmatrix}$. Tenendo conto della terza equazione $x_2+x_3=\mp 2x_3$ del sistema omogeneo che fornisce gli autovettori, una base di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di f è dunque data da

$$\begin{pmatrix}1\\i\\-\frac{i}{3}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3i\\1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ il nucleo e l'immagine di A
ii) Stabilire se A è diagonalizzabile per similitudine e se lo è per congruenza.
iii) Determinare gli indici di positività e di negatività di A.

Soluzione. i) Risulta $\det A = 2 \neq 0$. Dunque A definisce una trasformazione lineare invertibile, e ciò è sufficiente per concludere che $\ker A = 0$ e che $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3$.

ii) A è certamente diagonalizzabile per similitudine, essendo simmetrica e per il teorema spettrale. Lo stesso teorema spettrale assicura che la diagonalizzazione per similitudine può essere effettuato per mezzo di una matrice ortogonale. Da ciò segue che A, come ogni matrice simmetrica reale, è anche diagonalizzabile per congruenza.

iii) Gli indici di positività e di negatività di A coincidono rispettivamente con il numero di autovalori positivi e con il numero di autovalori negativi. Per determinare gli autovalori, basta scrivere il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + (1+\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda^2+1) = (1+\lambda)(2-\lambda^2),$$

da cui i tre autovalori $-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. Dunque l'indice di positività di A è 1, e l'indice di negatività di A è 2.