Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni). Prova scritta del 9.7.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome, numero di matricola e appello prescelto per l' orale su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$.

i) Si determini la posizione reciproca di r e π (paralleli, retta contenuta nel piano, incidenti, perpendicolari).

ii) Si scriva un'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare a π.

iii) Esiste un piano contenente r e parallelo a π ? (motivare la risposta).

Esercizio 2. Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia T quello generato dai vettori $(1,1,2,2)$, $(1,0,1,0)$, $(2,-1,1,-2)$.

i) Si determinino delle basi di S e di T.

ii) Si determinino delle basi di $S \cap T$ e di $S + T$.

Esercizio 3.

Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalle seguenti condizioni

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

ii) Si stabilisca (motivando la risposta) se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare $g : \mathbf{R^3} \times \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

i) Si verifichi che b è simmetrica.

ii) Si scriva la matrice A associata a b nella base canonica di $\mathbf{R^3}$.

iii) Si determinino gli indici di positività e di negatività di b.

iv) Si determini una matrice ortogonale N tale che ${}^tNAN$ sia diagonale.