Algebra Lineare (Proff. P. Piccinni - R. Pignoni)
Soluzioni della prova scritta del 9.7.2014

Esercizio 1. Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$.

i) Si determini la posizione reciproca di r e π (paralleli, retta contenuta nel piano, incidenti, perpendicolari).

ii) Si scriva un'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare a π.

iii) Esiste un piano contenente r e parallelo a π ? (motivare la risposta).

Soluzione. i) La retta r ha equazioni parametriche $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 1+2t$, e dunque parametri direttori $(1, -1, 2)$.I parametri di giacitura del piano π sono invece $(1, -2, -1)$: Dal confronto si ha subito che r e π sono incidenti non paralleli.

ii) I piani del fascio di asse r hanno equazione $h(x_1 - x_2 + x_3 - 1) + k(x_1 + x_2) = 0$, e imponendo la perpendicolarità con π si ottiene p. es. $h = 1, k = 2$. Dunque il piano è $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

iii) Data l'incidenza tra r e π non può esistere un tale piano.

Esercizio 2. Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

e sia T quello generato dai vettori $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(2, -1, 1, -2)$.

i) Si determinino delle basi di S e di T.

ii) Si determinino delle basi di $S \cap T$ e di $S + T$.

Soluzione. i) Una base per S è data dai vettori $(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)$, base per le soluzioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta S. Una base per T è invece data p. es. da $(0, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 0)$, che sono vettori linearmente indipendenti tra quelli assegnati che generano T.

ii) T è dunque rappresentato dal sistema $x_1 + x_2 - x_3 = 0, 2x_2 - x_4 = 0$. Mettendo insieme la quattro equazioni omogenee di S e di T si ottiene il generatore (base) $(0, 1, 1, 2)$ di $S \cap T$. Dalla formula di Grassmann segue che $S + T$ ha dimensione 3 e una sua base è data p. es. dai tre vettori $(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)$.

Esercizio 3.

Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalle seguenti condizioni

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

ii) Si stabilisca (motivando la risposta) se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione. i) Risulta

$$f\Big(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Big)=f\Big(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Big)-f\Big(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Big)=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$f(\Big(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Big)=f\Big(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Big)-f\Big(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice rappresentante f nella base canonica è quindi

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

e il polinomio caratteristico di A risulta

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1],$$

evidenziando gli autovalori $0,1,2$. Rispettivi autovettori sono $(0,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,1)$. ii) Tali autovettori non sono tra loro ortogonali. Dunque non può esistere una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare $g:\mathbf{R^3}\times\mathbf{R^3}\to\mathbf{R}$ definita da:

$$b(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3-x_1y_3-x_3y_1,$$

essendo $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3),\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

i) Si verifichi che b è simmetrica.

ii) Si scriva la matrice A associata a b nella base canonica di $\mathbf{R^3}$.

iii) Si determinino gli indici di positività e di negatività di b.

iv) Si determini una matrice ortogonale N tale che ${}^tNAN$ sia diagonale.

Soluzione. i) e ii) Si ha subito che $b(\vec{x},\vec{y})=b(\vec{y},\vec{x})$ e dunque che b è simmetrica. La matrice associata nella base canonica è

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

iii) Il suo polinomio caratteristico

$$\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1-t&0&-1\\0&-1-t&0\\-1&0&1-t\end{pmatrix}=-t(t+1)(t-2)$$

mostra che gli indici richiesti sono 1 come indice di positività, 1 di negatività e 1 di nullità.

iv) Una matrice ortogonale diagonalizzante è una matrice che ha per colonne una base ortonormale di autovettori di A. Dall'usuale algoritmo si ricava la seguente matrice

$$N=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}.$$