Es 1.

Per definizione $\sigma_c(\pi)$ è il piano formato dai punti simmetrici, rispetto a C, dei punti di π.

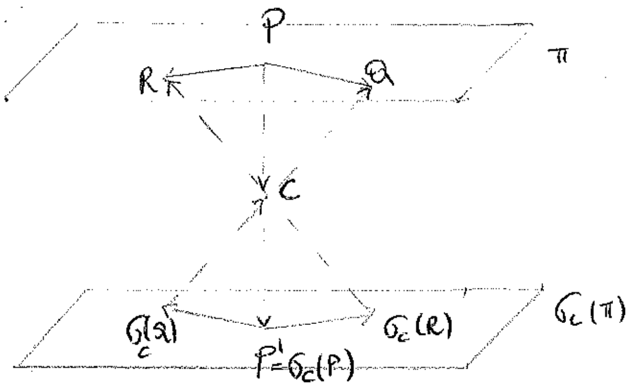
Verifichiamo subito che $\sigma_c(\pi)$ è parallelo a π.

Basta osservare che, $\forall\, P, Q \in \pi$, risulta

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\sigma_c(Q)\sigma_c(P)}$. Infatti

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CP'} + \overrightarrow{Q'C} = \overrightarrow{Q'P'} = \overrightarrow{\sigma_c(Q)\sigma_c(P)},$$

e quindi la giacitura di π coincide con quella di $\sigma_c(\pi)$.



Sia poi $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto assegnato di π, (quindi $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$).

Il piano $\sigma_c(\pi)$ è quindi il piano per $P_0' = \sigma_c(P_0)$ parallelo a π.

Dalla condizione $\overrightarrow{P_0C} = \overrightarrow{CP_0'}$ abbiamo che

$P_0' = (2c_1 - x_0, 2c_2 - y_0, 2c_3 - z_0)$. Consideriamo allora il fascio di piani (improprio) paralleli a π:

$$ax + by + cz = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere $\sigma_c(\pi)$ basta imporre la condizione di appartenenza del punto $\sigma_c(P_0)$ ad un piano del fascio:

$$a(2c_1 - x_0) + b(2c_2 - y_0) + c(2c_3 - z_0) = t$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2(ac_1 + bc_2 + cc_3) - \underbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0)}_{= -d} = t$$

$$\Longrightarrow \quad t = 2(ac_1 + bc_2 + cc_3) + d.$$

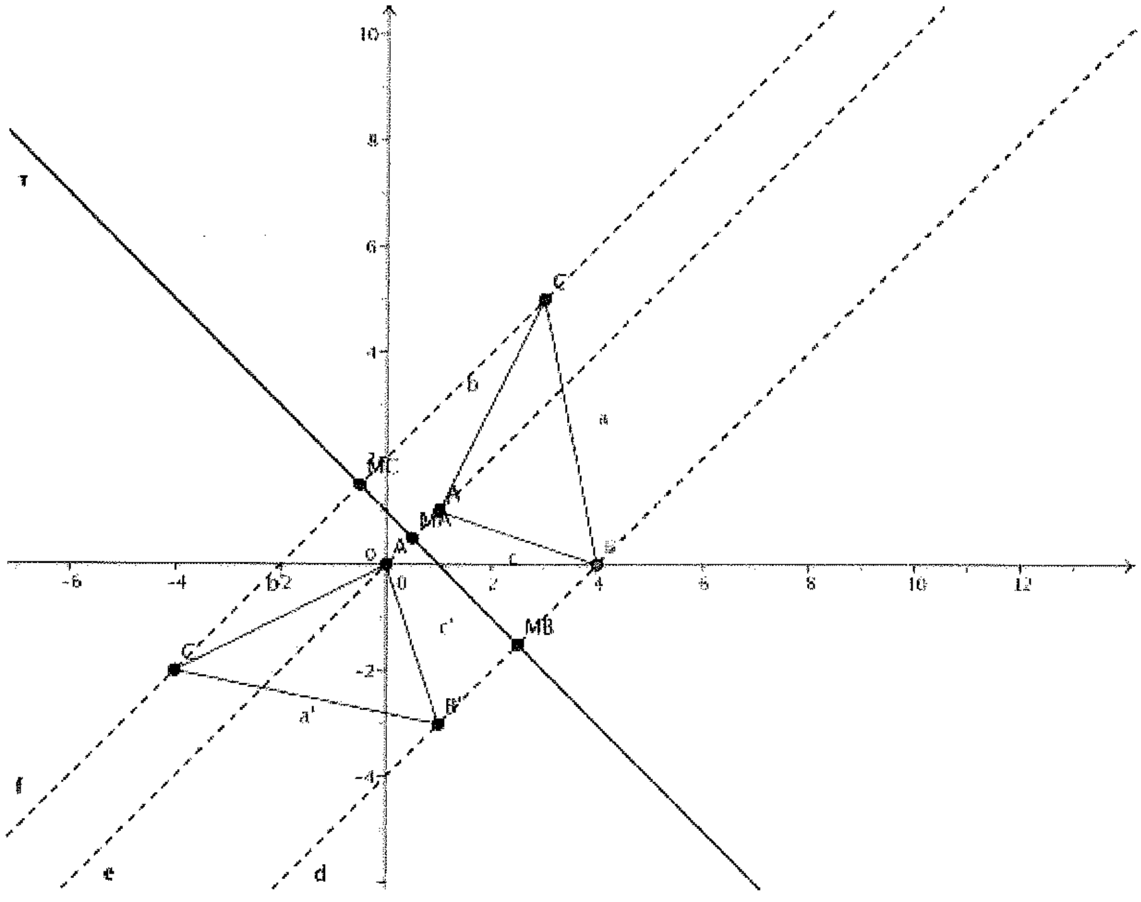
Il piano $\sigma_c(\pi)$ ha quindi equazione cartesiana:

$$ax + by + cz = 2(ac_1 + bc_2 + cc_3) + d.$$

Es 2.

La retta r ha equazione cartesiana $r: x + y = 1$.
Un vettore direttore di r è $\vec{v} = (l, m) = (-1, 1)$,
quindi il vettore $\vec{n} = (+1, +1)$ è ortogonale a $\vec{v}$,
(il loro prodotto scalare è nullo).
La direzione ortogonale ad r è quindi data
dal sottospazio $\langle \vec{n} \rangle = \langle (1,1) \rangle$.
Consideriamo il punto A e determiniamone
il punto simmetrico rispetto alla retta r nella
direzione di $\vec{n}$.
Chiamiamo r_A la retta passante per il punto A
e ortogonale alla retta r, le sue equazioni
parametriche sono dunque

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t. \end{cases}$$



r
C
b
a
MC
A
MA
B
c
A'
b'
C'
c'
MB
B'
a'
f
e
d

Indichiamo con H_A il punto ottenuto come intersezione della retta r con la retta r_A $(H_A = r \wedge r_A)$.
Risolvendo il sistema otteniamo $H_A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Possiamo ora calcolare il punto A' simmetrico di A, rispetto al punto H_A. $\left(A' = \sigma_{H_A}(A)\right)$.
Dalla condizione $\overrightarrow{AH_A} = \overrightarrow{H_A A'}$ otteniamo che
$A' = (2x_{H_A} - x_A,\ 2y_{H_A} - y_A) = (0,0)$.

Procedendo analogamente, otteniamo i punti B', C' simmetrici di B e C rispettivamente.
$B' = (1,-3)$, $C' = (-4,-2)$.

Es 3.

i) I piani richiesti sono i piani del fascio di asse la retta normale a p e passante per il punto P_0.
Tale retta ha vettore direttore dato da $\vec{n} = (1,-1,2)$. (In generale, se p è un piano di equazione cartesiana $ax+by+cz=d$, il vettore $\vec{n} = (a,b,c)$ è il vettore direttore di una retta ortogonale al piano.)
Cerchiamo un'equazione cartesiana per tale retta.
Per ottenerla sarà sufficiente annullare due minori di ordine due della matrice

$\begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, che ci permette di ottenere

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=2. \end{cases}$$

I piani richiesti sono dunque i piani del fascio

$$\lambda(x+y)+\mu(2x-z-2)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda+2\mu)x+\lambda y-\mu z-2\mu=0 \qquad \forall (\lambda,\mu)\neq(0,0).$$

ii) Il piano richiesto è il piano di giacitura $\{\vec{v}_1, \vec{n}\}$ dove $\vec{v}_1=(1,0,2)$ è il vettore direttore della retta r_1, $\vec{n}=(1,-1,2)$ è il vettore normale al piano p.

Tale piano ha dunque equazione cartesiana:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x-z=2.$$

iii) Il piano richiesto è il piano del fascio di asse la retta r_2, parallelo a $\vec{n}$.

Il generico piano q del fascio di asse r_2 è $tx+3y-z+1=0$.

La condizione di parallelismo $(q \parallel \vec{n})$

equivale a richiedere che il vettore normale al piano ρ_1, $\vec{n}_q = (t, 3, -1)$ sia ortogonale al vettore $\vec{n}$: $\langle \vec{n}_q, \vec{n} \rangle = \langle (t,3,-1), (1,-1,2) \rangle = 0$

$(\langle \vec{n}_q, \vec{n} \rangle = 0)$ $\Rightarrow t - 3 - 2 = 0 \Rightarrow t = 5.$

Il piano richiesto ha quindi equazione cartesiana:

$$5x + 3y - z + 1 = 0.$$

Es. 4.

i) Determiniamo la retta r passante per P e ortogonale al piano π. P' sarà quindi dato dall'intersezione tra tale retta, r, e il piano π.

La retta r ha vettore direttore parallelo al vettore normale al piano π: $\vec{n}_\pi = (1, 0, -2)$.

Di conseguenza equazioni parametriche per r sono

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \text{ cartesiane } \begin{cases} y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}.$$

Poiché $P' = r \cap \pi$, risolvendo il sistema troviamo $P' = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

ii) Consideriamo ora la retta r' passante per il punto P, nella direzione di $\vec{v}$.

$$r': \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Risulta $M = \pi \cap r'$. Risolvendo il sistema otteniamo $H = \left(2/3, 2/3, 1/3\right)$.

iii) Per calcolare l'area del triangolo $OP'H$ consideriamo l'area del parallelogramma ottenuta per mezzo del prodotto vettoriale del vettore $\vec{OP'}$ con il vettore $\vec{OH}$ e dividiamo tale area per 2.

$$S_{OP'H} = \frac{1}{2} \| \vec{OP'} \times \vec{OH} \|$$

dove $\vec{OP'} = \left(2/5, 0, 1/5\right)$, $\vec{OH} = \left(2/3, 2/3, 1/3\right)$

$$\vec{OP'} \times \vec{OH} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2/5 & 0 & 1/5 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = i\left(-2/15\right) - j(0) + k\left(4/15\right)$$

$$\vec{OP'} \times \vec{OH} = \begin{pmatrix} -2/15 \\ 0 \\ 4/15 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\| \vec{OP'} \times \vec{OH} \| = \sqrt{20/225} = 2/3\sqrt{5}$ e

quindi $S_{OP'H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}/15$.

iv) Per calcolare il volume del tetraedro $OP'RP$ non è necessario trovare il punto R, infatti basta osservare che

$$\mathrm{vol}(OP'RP) = \mathrm{vol}(OPHP') + \mathrm{vol}(OP'HR) =$$
$$= 2\,\mathrm{vol}(OPHP') = 2 \cdot S_{OP'H} \cdot |\vec{PP'}| = 4/45.$$

Dove

$\vec{PP'} = \left(2/5, 0, -4/5\right)$, $|\vec{PP'}| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

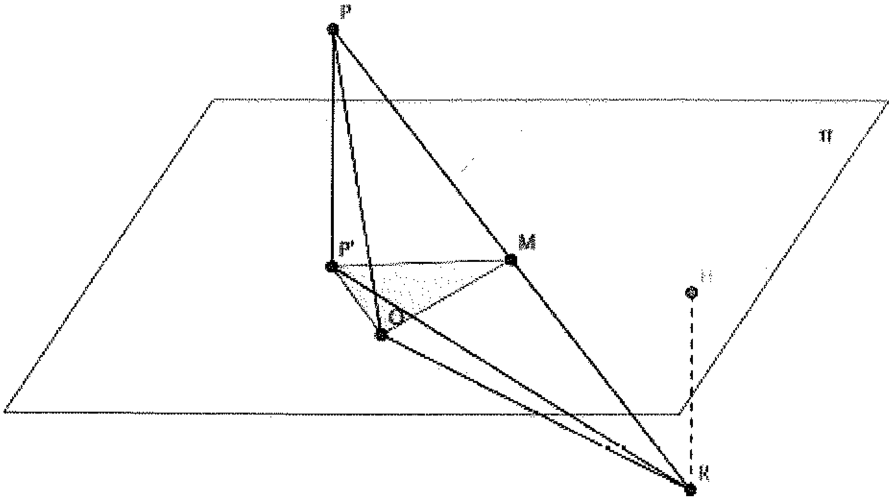


Figura 2: Tetraedro $OP'RP$