Es. 1 (un'applicazione lineare $S: V \to V$ V sp. vettoriale è detta endomorfismo)

i) La matrice associata ad S rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Allora $\operatorname{Ker} S = \{(-\frac{1}{2}t, -2t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$

una base per Ker S è data da

$B_{\operatorname{Ker} S} = \{(-\frac{1}{2}, -2, 1)\}$.

Una base dell'immagine di S

è data da $\{(2,-2,0), (0,1,1)\}$.

ii) S non è iniettiva in quanto $\dim(\operatorname{Ker} S) = 1$.

iii) Bisogna risolvere il sistema

$B(x,y,z)^T = (3,3,k)^T$.

Riduciamo a scala la matrice completa del sistema

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{pmatrix}$$

$rg B = rg C \iff k = 6$

quindi il sistema ha soluzione solo se $k = 6$

quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \frac{-1t}{2} \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3,3,k)$ appartiene all'immagine di S solo se $k = 6$.

In tal caso i vettori v t.c. $S(v) = (3,3,k)$ sono i vettori della forma

$$v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right)t \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right)t$ sono gli elementi del nucleo

Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right)$ e $w \in Ker(S)$,

poiché $S(v_0) = (3, 3, 6)$,

allora $S(v_0 + w) = S(v_0) + S(w) = (3, 3, 6) +$

$+ (0, 0, 0) = (3, 3, 6)$.

Tutoraggio 20/11/2013

Es 2

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Longrightarrow \pi = \{(x,y,z) = (-2t, t, s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Notiamo che $O \in \pi$ (il piano passa per l'origine) quindi π è uno s. vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x,y,z) = (-2t, t, s)$ di π è quindi data da

$$T(x,y,z) = A \cdot (x,y,z)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t+s \end{pmatrix}$$

L'immagine di π è il piano di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t + s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

la sua equazione cartesiana è

$$T(\pi): \quad 5x + 7y = 0 .$$

Es. 3

La retta s ha vettore direttore $(l, m) = (-1, 1)$. Per ottenere il punto $P_0 = s' \cap s''$ basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 . \end{cases}$$

Si ottiene : $P_0 = \left(3/5, 4/5\right)$.

La retta r cercata passa per il punto P_0 ed è parallela ad s; dunque ha equazione che otteniamo risolvendo

$$\det \begin{pmatrix} x - 3/5 & y - 4/5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè $x - 3/5 + y - 4/5 = 0 \iff x + y = 7/5$.

Si può procedere anche con due metodi alternativi:

1) Scrivendo l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta s e richiedendo che la retta r appartenga al fascio.
2) Scrivendo l'eq. del fascio proprio di centro P_0 e imponendo la condizione di parallelismo

tra la retta s e la generica retta del fascio.

Es. 4

i) Affinché le due rette r, r' risultino sghembe dobbiamo verificare che r, r' non siano complanari.
(N.B. due rette di uno spazio affine si dicono complanari se esiste un piano che le contiene entrambe.)
Quindi, calcoliamo il determinante della seguente matrice

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

Poiché il determinante è diverso da zero abbiamo che le rette r, r' sono sghembe.

ii) le coordinate di P_0 non soddisfano le equazioni di r, né di r' $\Rightarrow P_0 \notin r, r'$.

iii) Chiamiamo p, p' i piani passanti per P_0 e contenenti rispettivamente r e r', risulta allora $s = p \cap p'$ (l'intersezione dei due piani)

Per ottenere l'equazione cartesiana di p consideriamo il fascio di piani F di asse la retta r e imponiamo il passaggio per P_0.

$\Rightarrow F: \quad x - y - 1 + K(y+z) = 0 \qquad K \in \mathbb{R}.$

Imponendo il passaggio per P_0, otteniamo

$-2K + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}.$

Risulta allora $\quad p: 2x - y + z - 2 = 0.$

Analogamente, troviamo l'equazione cartesiana di p', $\quad p': 3x + 9y - 5z + 1 = 0.$

Pertanto le equazioni cartesiane di s sono:

$$s: \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ 3x + 9y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

iv)

Parametri direttori della retta r sono:

$l = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1; \quad m = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$n = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1;$

parametri direttori della retta r' sono:

$l' = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -3; \quad m' = -\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4;$

$n' = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -9;$

Parametri direttori di s

$$l_s = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} = -4 \; ; \; m_s = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 13$$

$$n_s = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 21$$

Poiché

$$rg\begin{pmatrix} l & l_s \\ m & m_s \\ n & n_s \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 13 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ s è non parallela ad r.

Analogamente, essendo:

$$rg\begin{pmatrix} l' & l_s \\ m' & m_s \\ n' & n_s \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 13 \\ -9 & 21 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ s è non parallela anche con r'!

$\Rightarrow$ s è incidente sia a r che a r'!

Es. 5

Una base per la giacitura del piano p

$< \vec{a}(a_1,a_2,a_3), \vec{b}(b_1,b_2,b_3) >$

è data da due soluzioni indipendenti

del sistema lineare omogeneo

$$2x - y = 0$$

che ha come soluzione

$$\left(\tfrac{1}{2}t, t, s\right) = t\left(\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) + s(0,0,1)$$

$\Rightarrow \quad < \left(\tfrac{1}{2}, 1, 0\right), (0,0,1) >.$

Scegliamo un punto $P \in p$, ad es. $P = (-1,0,0)$. Equazioni parametriche di p sono:

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

ii) il piano q ha giacitura

$<(0,1,0),(0,0,1)>$ e contiene il punto $(1,0,0)$.

$\Rightarrow$ q ha equazione cartesiana determinata da

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0$$

cioè $\quad x = 1$.

$q: \quad x = 1$

iii) Sia $r = p \wedge q$, cioè $r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$

(la matrice associata a tale sistema lineare

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha $rg = 2$)

Calcolando i 3 minori di ordine 2 di tale matrice (a segni alterni), si ottengono i parametri direttori l, m, n della retta r

$$l = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad m = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$n = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = +1$$

Osserviamo che la retta $r = p \wedge q$ è parallela all'asse z.