Es 1.

i) V è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei polinomi $1, x, x^2, x^3$; dunque

$$V = \text{Span}(1, x, x^2, x^3).$$

Tali polinomi sono linearmente indipendenti, infatti l'unica combinazione lineare dei quattro polinomi che dà il polinomio nullo (vettore nullo di V) è quella con tutti i coefficienti nulli:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ è il polinomio nullo}$$

<u>se e solo se</u> $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$.

Quindi i polinomi $1, x, x^2$ e x^3 costituiscono una base di V e la sua dimensione è 4

ii) Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V$

la condizione $\underline{p(0) = 0}$ equivale a $\underline{a = 0}$

Dunque

$$S = \{p(x) = bx + cx^2 + dx^3 : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Si vede allora che $S = \text{Span}(x, x^2, x^3)$ e dunque S è un sottospazio vettoriale di V.

Inoltre i tre polinomi x, x^2, x^3 sono linearmente indipendenti:

$bx + cx^2 + dx^3$ è il polinomio nullo

se e solo se $(b, c, d) = (0,0,0)$.

Quindi x, x^2, x^3 costituiscono una base di S e la sua dimensione è 3.

iii) Il sottoinsieme T non è un sottospazio vettoriale perché non contiene il polinomio nullo (vettore nullo di V). Infatti per il polinomio nullo la condizione $p(1) = 1$ non è verificata (il polinomio nullo vale 0 per ogni valore dell'indeterminata).

iv) Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

si ha $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$.

Dunque $p(2) = a + 2b + 4c + 8d$,

$p'(2) = b + 4c + 12d$.

Allora la condizione $p(2) = p'(2)$ diventa

$$a + 2b + 4c + 8d = b + 4c + 12d \Rightarrow a + b - 4d = 0$$

Quindi $U = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b - 4d = 0\}$.

Poiché la condizione che descrive i polinomi di U è un'equazione lineare omogenea, possiamo già concludere che U è un sottospazio vettoriale di V. Vediamo nel dettaglio, determinando una base e la dimensione.

Esplicitiamo la condizione rispetto ad un coefficiente (ad es. a) : $a = 4d - b$.
Dunque il generico polinomio di U ha la forma

$$p(x) = (4d-b) + bx + cx^2 + dx^3.$$

Raggruppando i coefficienti, otteniamo:

$$p(x) = b(x-1) + cx^2 + d(x^3+4).$$

Allora $U = \{p(x) = b(x-1) + cx^2 + d(x^3+4) ; b, c, d \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Span}(x-1, x^2, x^3+4)$.

Quindi U è il sottospazio generato dai polinomi $x-1$, x^2, x^3+4. Mostriamo ora che tali polinomi sono linearmente indipendenti. Se imponiamo che la loro generica combinazione lineare

$$b(x-1) + cx^2 + d(x^3+4) = (4d-b) + bx + cx^2 + dx^3$$

sia uguale al vettore nullo, otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} 4d - b = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

che ammette come <u>unica soluzione</u> $(b, c, d) = (0, 0, 0)$.
Dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di U. Allora $\dim U = 3$

es. 2

la matrice del sistema che rappresenta U è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a scala tale matrice.

$$\begin{array}{c} \\ r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ r_3 \to r_3 - \frac{1}{2} r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal modo otteniamo il seguente sistema ridotto a scala:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi U ha dimensione 2 e possiamo rappresentare parametricamente U con le variabili libere x_2, x_3:

Infatti posto $x_2 = s$, $x_3 = t$, una soluzione del sistema è data da $(-s-t, s, t, 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$

$U = \{ s(-1, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R} \}$

Una base per U è quindi costituita dai vettori

$(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$.

Con un ragionamento analogo si vede che una base per V è costituita dai vettori

$(-2, 1, 1, 0)$, $(2, -1, 0, 1)$.

Deduciamo che $U+V$ è generato dai vettori $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$.

Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1 \\ r_4 \to r_4 + 2r_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo che una base per $U+V$ è formata dai vettori: $(-1,1,0,0)$, $(0,-1,1,0)$, $(0,1,0,1)$.

Quindi un vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di $\mathbb{R}^4$ appartiene ad $U+V$ se e solo se la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo, cioè

$$\det A = -1 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} - x_1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\left[(-1)(-x_3) - x_4 + x_2\right] - x_1 \left[1\right] =$$

$$= -x_3 + x_4 - x_2 - x_1 \quad = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

(eq. cartesiana di $U+V$)

Es. 3

i) I vettori di U sono le soluzioni del sistema lineare formato dalla rappresentazione cartesiana di U. Risolvendo tale sistema, si vede che U ha dimensione 1
ed una sua base è costituita dal vettore $(1,1,1)$. Analogamente si vede che V ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(0,1,-1)$.

Quindi, una base per $U+V$ è formata dai vettori $(1,1,1)$ e $(0,1,-1)$.

$U+V$ ha dimensione 2.

Dalla formula di Grassmann:

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 0, ed una sua base è l'insieme vuoto.

ii) una rappresentazione cartesiana di $U+V$, si ottiene imponendo che il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{pmatrix}$$ sia nullo.

$\det A = x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \iff 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Tale equazione fornisce la rappresentazione cartesiana di $U+V$

iii) Il sottospazio W definito dall'equazione $x_1 - x_3 = 0$ ha dimensione 2, (è un piano) contiene U (il vettore $(1,1,1)$ soddisfa l'eq. di ma non contiene V in quanto il vettore $(0,1,-1)$ non soddisfa l'equazione di W.

iv) Poichè W_h ha dimensione 2, allora $W_h = U + V$ se e solo se la seguente matrice

$$\begin{array}{c} U \rightarrow \\ V \rightarrow \\ W_h < \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+h & 0 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2.

Ciò avviene esattamente quando $\boxed{h=1}$.

Es 4.

i) I vettori $u_1 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4$

$u_2 = v_1 + v_2$ sono per ipotesi

un sistema di generatori di U.

Tali vettori sono linearmente indipendenti, essendo non proporzionali

e costituiscono dunque una base B_U di U.

ii) Il vettore $u(k) = 2v_1 + kv_2 - v_3 + v_4 \in U$

se e solo se i vettori $u_1, u_2, u(k)$ sono linearmente dipendenti.

Questa condizione può imporsi richiedendo che

$$rg\, A(k) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u(k) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} < 3$$

Una riduzione a scala di $A(k)$ è ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & k+2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{scambio } r_2 \text{ con } r_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & k+2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 + 2r_2 \\ r_4 \to r_4 + r_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & k-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\, A(k) = 3 \iff k \neq 4$

$rg\, A(k) < 3 \iff k = 4$

$\Rightarrow u(k) \in U \iff k = 4$

iii) un sistema di generatori di V,
i cui primi 2 vettori coincidono con u_1, u_2 è
per esempio $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4$.
Una base di V che completa la base B_U
è quella che si estrae da tale sistema
di generatori richiedendo che essi siano
linearmente indipendenti. Utilizziamo la
riduzione a scala della matrice che ha per
colonne i precedenti vettori.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una riduzione a scala è ad esempio.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ho evidenziato i Pivots).

Una base di V che completa la base B_U è
quella costituita dai vettori u_1, u_2, v_1, v_3.

Es 5

Mostriamo innanzitutto che l'unica matrice che è simmetrica e simultaneamente antisimmetrica è la matrice nulla.

Infatti se $A^t = A$ e $-A^t = A$ allora si ha $A = -A$, quindi $2A = 0$ (matrice nulla), da cui segue $A = 0$.

Allora $S \cap T$ è il sottospazio banale di V contenente solo il vettore nullo (ha dimensione

Per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$
$$= 6 + 3 - 0 = 9.$$

Poiché l'unico sottospazio di V di dimensione 9 è V stesso, si ha

$$V = S + T = \{A + B : A \in S, B \in T\}$$

Inoltre, poiché $S \cap T$ contiene solo il vettore nullo, si ha $V = S \oplus T$.

In altri termini, ogni matrice di V si può scrivere in modo unico come somma di una matrice simmetrica più una antisimmetrica. In generale, data una matrice $A \in V$, la decomposizione è data da

$$A = \underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\in T} .$$

Ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$