Cognome: ....Nome: .... Matricola: ....

Algebra Lineare (I-Z) Prof. P. Piccinni - Prova in itinere del 11.11.2013

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. Svolgere gli esercizi con ordine e completezza dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti. Non è invece consentito l'uso di calcolatrici e di telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si considerino i sistemi lineari

$$\begin{cases} y + z = -t \\ y - z = -t \end{cases}$$

i) Determinare i sottoinsiemi $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni dei sistemi risp. (1) e (2).

ii) U_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? E U_2? (Motivare le risposte!).

iii) Osservato che il sistema (2) è il sistema lineare omogeneo associato al sistema (1), si illustri la compatibilità delle risposte date nei punti i) e ii) con il teorema di struttura relativo al confronto tra gli insiemi delle soluzioni di un sistema lineare e delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Esercizio 2. Siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

il loro prodotto righe per colonne.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere per ogni scelta di $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, dandone dimostrazione in caso di risposta affermativa, o fornendo un controesempio in caso di risposta negativa.

i) $(AB)^t = A^t B^t$.

ii) $(AB)^t = B^t A^t$.

iii) $A(B^t) = B(A^t)$.

iv) tr $[A(B^t)]$ = tr $[B(A^t)]$ [si ricordi che la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi della sua diagonale principale: se $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, allora la traccia è tr $C = c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}$].

v) Per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, la matrice AA^t è simmetrica.

vi) Le risposte date nei precedenti punti i), ii), iii), iv), v) valgono anche per $A, B \in M_n(\mathbb{R})$? [Motivare la risposta]

Esercizio 3. Si considerino le seguenti terne di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1,1,2),\ \vec{u}_2 = (-1,2,1),\ \vec{u}_3 = (1,8,9);$$

$$\vec{w}_1 = (7,5,2),\ \vec{w}_2 = (-3,-2,1),\ \vec{w}_3 = (1,1,4).$$

e i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U = \text{ Span }(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3), \quad W = \text{ Span }(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3).$$

i) Determinare una base di U e una base di W.
ii) Scrivere equazioni cartesiane dei sottospazi U e W.
iii) Scrivere equazioni cartesiane di $U \cap W$.
iv) Determinare una base di $U \cap W$.
v) Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \quad T(\vec{u}_2) = \vec{w}_2, \quad T(\vec{u}_3) = \vec{w}_3\ ? \qquad \text{[Motivare la risposta]}$$