Algebra Lineare (I-Z) Prof. P. Piccinni - Soluzioni della prova in itinere del 11.11.2013

Esercizio 1. Si considerino i sistemi lineari

$$(1)\quad \begin{cases} x+\ y+\quad z= & 1\\ x+\ y-\quad z= & 0\\ 3x+3y+13z= & 8\\ 5x+5y-\ 9z= & -2\\ 5x+5y+\ 2z= & 3\end{cases} \qquad \text{e} \qquad (2)\quad \begin{cases} x+\ y+\quad z=0\\ x+\ y-\quad z=0\\ 3x+3y+13z=0\\ 5x+5y-\ 9z=0\\ 5x+5y+\ 2z=0\end{cases}$$

i) Determinare i sottoinsiemi $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni dei sistemi risp. (1) e (2).

ii) U_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? E U_2? (Motivare le risposte!).

iii) Osservato che il sistema (2) è il sistema lineare omogeneo associato al sistema (1), si illustri la compatibilità delle risposte date nei punti i) e ii) con il teorema di struttura relativo al confronto tra gli insiemi delle soluzioni di un sistema lineare e delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Soluzione esercizio 1.

i) + ii) Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 13\\ 5 & 5 & -9\\ 5 & 5 & 2\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 13 & 8\\ 5 & 5 & -9 & -2\\ 5 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

sono matrici rispettivamente dei coefficienti e dei coefficienti e termini noti del sistema lineare (1). Con varie modalità è possibile riconoscere che rg $A = 2$ e rg $B = 3$. P. es. si può osservare che A ha solo due righe linearmente indipendenti, essendo la sua terza riga combinazione lineare delle prime due, con coefficienti 8 e -5; inoltre la quarta riga di A è anche combinazione lineare delle prime due con coefficienti-2 e -7; infine l'ultima riga di A è la metà della somma delle prime quattro. Da ciò segue che rg $A = 2$. Delle tre precedenti relazioni di combinazione lineare tra le righe di A, le prime due valgono anche per le righe di B. Tuttavia l'ultima riga di B non è la metà della somma delle altre, e questo consente di concludere che rg $B = 3$. Il teorema di Rouché Capelli implica dunque che il sistema (1) non ha soluzioni, ovvero $U_1 = \emptyset$.

Per quanto riguarda invece il sistema lineare omogeneo (2), esso certamente ammette soluzioni, ed essendo A - con rg $A = 2$ - la sua matrice dei coefficienti, ne ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$, ovvero dipendenti da un parametro. Per ottenerle esplicitamente ci si può limitare alle prime due equazioni del sistema, ovvero trattando l'incognita $x = t$ come parametro alle due equazioni

$$\begin{cases} y+z=-t\\ y-z=-t\end{cases}$$

L'insieme U_2 delle soluzioni del sistema omogeneo (2) è dunque costituito dalle terne $(t, -t, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$. Esso è certamente un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, sia perché spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, sia perché esplicitamente l'insieme U_2 - sopra determinato - risulta chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. L'insieme $U_1 = \emptyset$ non è invece un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, mancando in esso il vettore nullo.

iii) Quanto sopra è certamente compatibile con il teorema di struttura. Infatti tale teorema, nell'ipotesi in cui si ha un sistema lineare senza soluzioni - come risulta appunto il sistema (1) -

non afferma assolutamente nulla: il sistema omogeneo associato infatti ha sempre soluzioni, e nella situazione attuale del sistema (2), ne ha infinite.

Esercizio 2. Siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

il loro prodotto righe per colonne.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere per ogni scelta di $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, dandone dimostrazione in caso di risposta affermativa, o fornendo un controesempio in caso di risposta negativa.

i) $(AB)^t = A^t B^t$.

ii) $(AB)^t = B^t A^t$.

iii) $A(B^t) = B(A^t)$.

iv) tr $[A(B^t)]$ = tr $[B(A^t)]$ [si ricordi che la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi della sua diagonale principale: se $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, allora la traccia è tr $C = c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}$].

v) Per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, la matrice AA^t è simmetrica.

vi) Le risposte date nei precedenti punti i), ii), iii), iv), v) valgono anche per $A, B \in M_n(\mathbb{R})$? [Motivare la risposta]

Soluzione esercizio 2.

i) E' falsa. Per esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ risulta:

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A^t B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) E' vera, e lo è più in generale in $M_n(\mathbb{R})$. Infatti, posto $AB = C = (c_{ij})$, risulta

$$c_{ij} = \sum_{k=1,\ldots,n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dunque l'elemento di posto (i, j) in $(AB)^t$ risulta

$$c_{ji} = \sum_{k=1,\ldots,n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1,\ldots,n} b_{ki} a_{jk},$$

e risulta pertanto prodotto della i-esima riga di B^t con la j-esima colonna di A^t.

iii) E' falsa, e lo stesso controesempio dato in i) funziona. Si ottiene infatti con questa scelta

$$A(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv) E' vera, e anche qui più in generale in $M_n(\mathbb{R})$. Infatti, posto ora $A(B^t) = C = (c_{ij})$, risulta che gli elementi sulla diagonale principale sono

$$c_{ii} = \sum_{k=1,\ldots,n} a_{ik} b_{ik} = \sum_{k=1,\ldots,n} b_{ik} a_{ik},$$

coincidendo quindi con gli elementi sulla diagonale principale di $B(A^t)$.

v) E' vero e segue da ii). Infatti:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t.$$

vi) Si', e le motivazioni dei casi in cui le affermazioni sono vere sono già state date. D'altra parte i controesempi forniti possono essere facilmente estesi all'ordine n, p. es. scegliendo matrici che hanno il blocco in alto a sinistra come nei controesempi 2×2, e zero altrove. Si noti che il quesito può essere inteso come il richiedere se le identità non valgano per ogni n: in questo caso il controesempio dato per $n = 2$ è sufficiente per concludere.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti terne di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1,1,2),\ \vec{u}_2 = (-1,2,1),\ \vec{u}_3 = (1,8,9);$$

$$\vec{w}_1 = (7,5,2),\ \vec{w}_2 = (-3,-2,1),\ \vec{w}_3 = (1,1,4).$$

e i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U = \text{ Span } (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3), \quad W = \text{ Span } (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3).$$

i) Determinare una base di U e una base di W.
ii) Scrivere equazioni cartesiane dei sottospazi U e W.
iii) Scrivere equazioni cartesiane di $U \cap W$.
iv) Determinare una base di $U \cap W$.
v) Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \quad T(\vec{u}_2) = \vec{w}_2, \quad T(\vec{u}_3) = \vec{w}_3 \ ? \qquad \text{[Motivare la risposta]}$$

Soluzione esercizio 3.

i) Risulta subito che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0,$$

e pertanto sia i vettori $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ che i vettori $\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3$ sono linearmente dipendenti (e naturalmente sia $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ che $\vec{w}_1,\ \vec{w}_2$ sono linearmente indipendenti). Dunque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ è una base di U e $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W

ii) + iii) Le equazioni cartesiane di U e di W possono scriversi richiedendo che il vettore generico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sia combinazione lineare risp. di $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ e di $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Le equazioni sono dunque quelle dei due piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U : \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad W : \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 7 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $U : x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $W : 9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0$. Le equazioni di $U \cap W$ sono dunque date dal sistema costituito da tali due equazioni.

iv) Il precedente sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

di equazioni cartesiane di $U \cap W$ ha soluzioni (dipendenti dal parametro $x_3 = t$) p.es. $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{6}{11}t, \frac{5}{11}t, t)$. Una base di $U \cap W$ è dunque costituita dal vettore $\vec{v} = (\frac{6}{11}, \frac{5}{11}, 1)$, che si ottiene per $t = 1$.

v) No. Infatti, dovendo essere $\vec{u}_3 = \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2$, può scriversi (usando le componenti dei tre vettori) il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 8 \\ 2\lambda + \mu = 9 \end{cases}$$

la cui soluzione $(\lambda, \mu) = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3})$ consente di scrivere

$$\vec{u}_3 = \frac{10}{3}\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2.$$

Naturalmente, se T è lineare, e se $T(\vec{u}_1) = w_1$, $T(\vec{u}_2) = \vec{w}_2$, deve risultare che

$$\begin{aligned} T(\vec{u}_3) = T\Big(\frac{10}{3}\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2\Big) = \frac{10}{3}T(\vec{u}_1) + \frac{7}{3}T(\vec{u}_2) = \frac{10}{3}\vec{w}_1 + \frac{7}{3}\vec{w}_2 = \\ = \frac{10}{3}(7, 5, 2) + \frac{7}{3}(-3, -2, 1) = \Big(\frac{49}{3}, 12, 9\Big) \neq \vec{w}_3. \end{aligned}$$