Algebra Lineare (I-Z) Prof. P. Piccinni - Soluzioni della prova in itinere del 13.1.2014

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, usando coordinate (x, y, z) relative a un riferimento cartesiano, si considerino i punti

$$A = (3, -2, -1),\ B = (0, -1, -2),\ C = (4, -4, 0).$$

i) Verificare che i punti A, B, C non sono allineati.
ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente i punti A, B, C.
iii) Scrivere le equazioni parametriche delle rette AB, AC e BC.
iv) Calcolare l'area del triangolo ABC.
v) ABC è un triangolo rettangolo? (Motivare la risposta)

Soluzione esercizio 1.

i) Per verificare che A, B, C non sono allineati è sufficiente mostrare che i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ non sono paralleli: Risulta infatti $\vec{AB} = (-3, 1, -1)$, $\vec{AC} = (1, -2, 1)$ e il loro non parallelismo è evidente.

ii) Il piano α può ottenersi p. es. come piano per A parallelo ai due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Dunque, se $P = (x, y, z)$, si ha che $P \in \alpha$ se e solo se i vettori $\vec{AP}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ sono complanari, ovvero linearmente dipendenti. Scrivendo le componenti dei tre vettori come righe di una matrice, la condizione è dunque

$$\det \begin{pmatrix} x-3 & y+2 & z+1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Quest'ultima, eventualmente scritta svolgendo il determinante:

$$-x + 2y + 5z + 12 = 0$$

è l'equazione cartesiana del piano α.

iii) Le equazioni parametriche vettoriali delle tre rette, nel parametro $t \in \mathbb{R}$, sono rispettivamente

$$\vec{AP} = t\vec{AB},\ \vec{AP} = t\vec{AC},\ \vec{BP} = t\vec{BC}.$$

Essendo

$$\vec{AP} = (x-3, y+2, z+1),\ \vec{AB} = (-3, 1, -1),\ \vec{AC} = (1, -2, 1),\ \vec{BP} = (x, y+1, z+2),\ \vec{BC} = (4, -3, 2),$$

da esse si hanno subito le equazioni parametriche scalari delle tre rette:

$$\begin{cases} x-3 = -3t \\ y+2 = t \\ z+1 = -t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-3 = t \\ y+2 = -2t \\ z+1 = t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 4t \\ y+1 = -3t \\ z+2 = 2t \end{cases}.$$

iv) L'area del triangolo ABC è la metà del modulo del prodotto vettoriale dei vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Dunque:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(-1, 2, 5)| = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

v) Poiché non intercorrono relazioni di perpendicolarità tra i vettori $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, il triangolo non è rettangolo.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

i) Scrivere il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori di A.

ii) Stabilire se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Soluzione esercizio 2.

i) Il polinomio caratteristico di A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -3 & \lambda-2 & -1 \\ -3 & -3 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda-7)$$

fornisce subito i tre autovalori $0, -1, 7$ della matrice A.

ii) Poiché i tre autovalori sono distinti, la matrice risulta diagonalizzabile. I rispettivi autovettori si determinano risolvendo i sistemi lineari omogenei

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y+3z=-x \\ 3x+2y+z=-y \\ 3x+3y+3z=-z \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y+3z=7x \\ 3x+2y+z=7y \\ 3x+3y+3z=7z \end{cases}.$$

Ognuno di tali sistemi ha per soluzioni una retta vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Generatori di tali rette-autospazi, e dunque insieme una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice A, sono i vettori:

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (17, 15, 24),$$

rispettivamente autovettori degli autovalori $0, -1, 7$.

Esercizio 3. Sia $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'operatore lineare sullo spazio vettoriale reale $V^4 = M_2(\mathbb{R})$ definito dalla formula

$$T(M) = M + 2M^t,$$

ovvero, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, più esplicitamente:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}.$$

i) Con riferimento alla base canonica

$$\mathbb{E} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$, scrivere la matrice A associata a T.

ii) Stabilire se T è diagonalizzabile.

iii) Determinare gli autovalori di T con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

Soluzione esercizio 3.

i) Dalla definizione di T risulta subito

$$T(E_{11}) = 3E_{11}, \quad T(E_{12}) = E_{12} + 2E_{21}, \quad T(E_{21}) = 2E_{12} + E_{21}, \quad T(E_{22}) = 3E_{22}.$$

La matrice associata a T nella base canonica $\mathbb{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ risulta pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Poiché A è simmetrica e la base $\mathbb{E}$ ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R})$), l'endomorfismo T risulta autoaggiunto e dunque diagonalizzabile.

iii) Gli autovalori di T sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda - 3)^3(\lambda + 1).$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 3, e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 1.

I rispettivi autospazi si ottengono dunque subito dalla definizione di T, ovvero $T(M) = M + 2M^t$. Per l'autovalore 3 l'autospazio è infatti costituito dalle matrici M tali che $M + 2M^t = 3M$, ovvero $-2M + 2M^t = 0$, ovvero ancora $M = M^t$; tale autospazio è dunque costituito dalle matrici simmetriche di $M_2(\mathbb{R})$. Per l'autovalore -1 l'autospazio è invece costituito dalle matrici M tali che $M + 2M^t = -1M$, ovvero $2M + 2M^t = 0$, ovvero ancora $M = -M^t$; tale autospazio è dunque costituito dalle matrici antisimmetriche di $M_2(\mathbb{R})$. Le rispettive moltiplicità geometriche sono dunque 3 per l'autovalore 3, e 1 per l'autovalore -1, e coincidono con le rispettive molteplicità algebriche.

In alternativa, gli autospazi possono essere anche ottenuti con la procedura usata nella soluzione del precedente esercizio 2. Gli autospazi degli autovalori 3 e -1 sono infatti costituiti dalle matrici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i cui elementi sono soluzioni dei sistemi omogenei, rispettivamente:

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{cases} 3a = 3a \\ b + 2c = 3b \\ 2b + c = 3c \\ 3d = 3d \end{cases}, \quad \begin{cases} 3a = -a \\ b + 2c = -b \\ 2b + c = -c \\ 3d = -d \end{cases}.$$

Si ottengono dunque rispettivamente gli autospazi $V_3 = \text{Span } \{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ e $V_{-1} = \text{Span } \{E_{12} - E_{21}\}$, ovvero i sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$ costituiti dalle matrici simmetriche e dalle matrici antisimmetriche.