Algebra Lineare, a.a. 2013-14 - Prof. P. Piccinni

Tradizionale Tombolata di Fine Anno

Tombola (5 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 2 punti
Quaterna (4 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 1.5 punti
Terno (3 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 1 punto
Ambo(2 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 0,5 punti

N.B: Termine ultimo per la consegna: 9 Gennaio 2014, ore 13.00
I bonus sono spendibili solo nei due appelli di Gennaio-Febbraio 2014

Esercizio 1. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k-1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

i) Calcolare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il rango di A.

ii) Considerata l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ associata ad A, determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la dimensione e le equazioni del nucleo $kerF \subset \mathbf{R}^5$.

iii) Determinare, sempre al variare di k, una base di $kerF$.

Esercizio 2. Siano $U = Span\{\vec{u}\}$ e $W = Span\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ generati rispettivamente dal vettore $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e dai vettori $\vec{w}_1 = (1, 2, 3), \vec{w}_2 = (1, 1, 1)$

i) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

ii) Stabilire se lo spazio vettoriale somma $U + W$ è una somma diretta.

iii) Scrivere equazioni cartesiane dei sottospazi affini $U' = \vec{v}_0 + U$ e $W' = \vec{v}_0 + W$ di $\mathbf{R}^3$, essendo $\vec{v}_0 = (3, 3, 0)$.

Esercizio 3. Spazio euclideo, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1 = (2, 2, 0), \quad P_2 = (2, 0, 2), \quad P_3 = (0, 2, 2), \quad P_4 = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici di un tetraedro regolare T.

ii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce di T.

iii) Calcolare il volume di T.

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che A e B sono invertibili e calcolare $B^{-1}AB$ e $A^{-1}BA$.

ii) Stabilire se qualcuna tra le matrici A, B, $B^{-1}AB$, $A^{-1}BA$ è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si considerino le matrici:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ h & 2+h & 2+h \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 6+k \\ -1 & -1 & 2+k \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di h e k, i determinanti e le tracce di $A(h)$ e di $B(k)$.

ii) Verificare che esiste un'unica coppia (h_0, k_0) tale che risulti $\det A(h_0) = \det B(k_0)$ e $\mathrm{tr}\, A(h_0) = \mathrm{tr}\, B(k_0)$.

iii) Stabilire se le matrici $A_0 = A(h_0)$ e $B_0 = B(k_0)$ hanno gli stessi autovalori.

iv) Stabilire infine se A_0 e B_0 sono matrici simili.