Algebra Lineare, a.a. 2013-14 - Prof. P. Piccinni
Soluzioni della Tombolata di Fine Anno

Esercizio 1. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k-1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

i) Calcolare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il rango di A.
ii) Considerata l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ associata ad A, determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la dimensione e le equazioni del nucleo $kerF \subset \mathbf{R}^5$.
iii) Determinare, sempre al variare di k, una base di $kerF$.
Soluzione. La riduzione a scala di A fornisce:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k-1 & 1 & k & k \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k+1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A'' = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -k & k & -2(k+1) \end{pmatrix}.$$

Vi sono quindi 3 pivots (risp. $1, 1, -k$ se $k \neq 0$, e $1, 1, -2$ se $k = 0$) e dunque $rgA = 3$ per ogni k.
In alternativa alla riduzione a scala si può osservare che la sottomatrice quadrata B di A formata dalla prima, terza e quinta colonna di A ha determinante:

$$detB = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ne segue $rgA = 3$ per ogni k.
Dunque dim $imF = 3$, dim $kerF = 5 - 3 = 2$ e il nucleo di F si rappresenta nelle coordinate $(x_1, ..., x_5)$ di $\mathbf{R}^5$ con le tre equazioni

$$\begin{cases} & (k+1)x_2 & +x_3 & +kx_4 & & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & +2x_5 & = & 0 \\ x_1+ & (k-1)x_2 & +x_3 & +kx_4 & +kx_5 & = & 0 \end{cases}$$

che, essendo $rgA = 3$, sono linearmente indipendenti per ogni k. Per determinare una base di $kerF$ si può prima risolvere il sistema delle sue equazioni, p. es. rispetto a x_1, x_3, x_5 (incognite i cui coefficienti costituiscono la sottomatrice B sopra considerata). Con questa scelta si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 & = & (2 - \frac{k^2}{2})t - \frac{k^2}{2}s \\ x_2 & = & t \\ x_3 & = & -(k+1)t - ks \\ x_4 & = & s \\ x_5 & = & \frac{k}{2}t + \frac{k}{2}s \end{cases}$$

Per $(t, s) = (1, 0)$ e $(t, s) = (0, 1)$ si ottengono i due vettori rispettivamente $\vec{v}_1 = (2 - \frac{k^2}{2}, 1, -(k+1), 0, \frac{k}{2})$ e $\vec{v}_2 = (-\frac{k^2}{2}, 0, -k, 1, \frac{k}{2})$, base di $kerF$.

Esercizio 2. Siano $U = Span\{\vec{u}\}$ e $W = Span\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ generati rispettivamente dal vettore $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e dai vettori $\vec{w}_1 = (1, 2, 3), \vec{w}_2 = (1, 1, 1)$
i) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
ii) Stabilire se lo spazio vettoriale somma $U + W$ è una somma diretta.

iii) Scrivere equazioni cartesiane delle sottovarietà affini $U' = \vec{v}_0 + U$ e $W' = \vec{v}_0 + W$ di $\mathbf{R}^3$, essendo $\vec{v}_0 = (3, 3, 0)$.

Soluzione. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ha determinante nullo e, come subito si vede, rango 2. Di fatto si riconosce che sussiste la relazione $\vec{u} = 4\vec{w}_2 - \vec{w}_1$. Ne segue che la retta U, generata da $\vec{u}$, è contenuta nel piano W, generato da $\vec{w}_1, \vec{w}_2$. Dunque il sottospazio $U \cap W$ coincide con U, e ha quindi dimensione 1 e base $\vec{u}$. La stessa inclusione $U \subset W$ mostra anche che la somma $U + W$ coincide con W e non è quindi una somma diretta.

Le equazioni parametriche di U' si ottengono subito assumendo $\vec{u}$ come vettore direttore di U' e sono, nelle coordinate (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$:

$$x - 3 = 3t, y - 3 = 2t, z = t,$$

da cui per eliminazione del parametro t le equazioni cartesiane della retta U':

$$x = 3z + 3, y = 2z + 3.$$

Le equazioni parametriche di W' si ottengono invece imponendo la dipendenza lineare del vettore $(x - 3, y - 3, z)$ con $\vec{w}_1 = (1, 2, 3)$ e $\vec{w}_2 = (1, 1, 1)$. Di qui anche l'equazione cartesiana di W':

$$det \begin{pmatrix} x-3 & y-3 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(x-3) + 2(y-3) - z = 0.$$

Esercizio 3. Spazio euclideo, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1(2, 2, 0), \;\; P_2(2, 0, 2), \;\; P_3(0, 2, 2), \;\; P_4\Big(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\Big).$$

i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici di un tetraedro regolare T.
ii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce di T.
iii) Calcolare il volume di T.

Soluzione. Usando la formula della distanza tra due punti si ha subito $d(P_\alpha, P_\beta) = \sqrt{8}$per tutte le scelte $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$; $\alpha \neq \beta$. Se ne deduce che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici di un tetraedro regolare T.

Conviene denotare i quatto piani facce di T nel modo seguente:

β_1 il piano di P_2, P_3, P_4, ovvero passante per P_2 e parallelo ai vettori $\vec{P_2P_3}$ e $\vec{P_2P_4}$;

β_2 il piano di P_1, P_3, P_4, ovvero passante per P_1 e parallelo ai vettori $\vec{P_1P_3}$ e $\vec{P_1P_4}$;

β_3 il piano di P_1, P_2, P_4, ovvero passante per P_1 e parallelo ai vettori $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_4}$;

β_4 il piano di P_1, P_2, P_3, ovvero passante per P_1 e parallelo ai vettori $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$.

Dunque, poiché

$$\vec{P_1P_2} = (0, -2, 2), \; \vec{P_1P_3} = (-2, 0, 2), \; \vec{P_2P_3} = (-2, 2, 0),$$

$$\vec{P_1P_4} = \Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\Big), \; \vec{P_2P_4} = \Big(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\Big), \; \vec{P_3P_4} = \Big(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}. \frac{2}{3}\Big),$$

risulta

$$\beta_1 : det \begin{pmatrix} x-2 & y & z-2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 & 2/3 \end{pmatrix} = 0, \quad \beta_2 : det \begin{pmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -2 & 0 & 2 \\ 2/3 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\beta_3 : det \begin{pmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 2 \\ 2/3 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 0, \quad \beta_4 : det \begin{pmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Il volume del tetraedro è 1/6 (area triangolo per altezza diviso 3) del volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{P_1P_2} = (0,-2,2)$, $\vec{P_1P_3} = (-2,0,2)$, $vecP_1P_4 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Dunque il volume è:

$$\frac{1}{6}\ \ |det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2/3 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix}| = \frac{8}{3}.$$

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che A e B sono invertibili e calcolare $B^{-1}AB$ e $A^{-1}BA$.

ii) Stabilire se qualcuna tra le matrici A, B, $B^{-1}AB$, $A^{-1}BA$ è diagonalizzabile.

Soluzione. Risulta $detA = 2$, $detB = 1$ e ciò mostra che A e B sono invertibili. Le matrici aggiunte di A e di B hanno per elementi i complementi algebrici delle rispettive trasposte. Pertanto:

$$AggA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AggB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni caratteristiche di A e di B sono rispettivamente $det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ e $det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^2 = 0$.

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, e il fatto che essi sono distinti mostra che A è diagonalizzabile. Ma allora anche la matrice $B^{-1}AB$, coniugata di A mediante B, è diagonalizzabile.

La matrice B ha invece come unico autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2. La sua molteplicità geometrica è la dimensione dello spazio dei corrispondenti autovettori, che sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 + & x_2 \\ x_2 & = & & x_2 \end{cases}.$$

Tale dimensione è evidentemente 1, dunque minore della molteplicità algebrica, e ciò mostra che sia B che la matrice $A^{-1}BA$, ad essa coniugata, non sono diagonalizzabili.

Esercizio 5. Si considerino le matrici:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ h & 2+h & 2+h \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 6+k \\ -1 & -1 & 2+k \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di h e k, i determinanti e le tracce di $A(h)$ e di $B(k)$.

ii) Verificare che esiste un'unica coppia (h_0, k_0) tale che risulti det $A(h_0) =$ det $B(k_0)$ e tr $A(h_0) =$ tr $B(k_0)$.

iii) Stabilire se le matrici $A_0 = A(h_0)$ e $B_0 = B(k_0)$ hanno gli stessi autovalori.

iv) Stabilire infine se A_0 e B_0 sono matrici simili.

Soluzione. Risulta $detA(h) = 2h+2$, $detB(k) = 10k+24$, $trA(h) = 4+h$, $trB(k) = 7+k$, e il sistema $2h+2 = 10k+24$, $4+h = 7+k$ ammette l'unica soluzione $(h_0, k_0) = (1, -2)$. Per tali valori h_0 e k_0 i polinomi caratteristici di $A_0 = A(h_0)$ e di $B_0 = B(k_0)$ sono:

$$det(A_0 - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1),$$

$$det(B_0 - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)^2,$$

e pertanto A_0 e B_0 hanno gli stessi autovalori $\lambda = 1$ (di molteplicità algebrica 1) e $\lambda = 2$ (di molteplicità algebrica 2). I vettori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3}$ che sono autovettori corrispondenti a $\lambda = 2$ per le due matrici, si ottengono come soluzioni dei seguenti sistemi:

$$A_0 : \begin{cases} -x_3 = & 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = & 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = & 0 \end{cases}, \qquad B_0 : \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = & 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = & 0 \end{cases}.$$

In tali due sistemi la matrice dei coefficienti ha rango rispettivamente 2 e 1. Ne segue che $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 1 per A_0 e molteplicità geometrica 2 per B_0. Dunque la matrice A_0 è diagonalizzabile, al contrario di B_0, e A_0 e B_0 non sono simili.