Algebra Lineare (Prof. P. Piccinni)

Esercitazione scritta del 6.11.2013

1. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\vec{w}_1 = (-1, 1, 3, 1, 2), \vec{w}_2 = (-2, 0, -2, 0, 2),$$

$$\vec{w}_3 = (0, -2, -8, -2, -2), \vec{w}_4 = (-3, -1, -7, -1, 2).$$

Determinare:
i) La dimensione e una base di W.
ii) Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di W.

2. Dati gli insiemi:

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}, \quad Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 1\},$$

$$Z_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x + z = 1\},$$

$$Z_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = 0\}, \quad Z_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

stabilire quali Z_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ognuno dei sottospazi vettoriali determinare una base.

3. Determinare i valori di k per cui il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + t = 1 \\ x + ky = 1 \\ kz + t = 1 \\ y + kt = 1 \end{cases}$$

ammette (a) un'unica soluzione, (b) nessuna soluzione, (c) più di una soluzione.
Esaminare l'analogo problema per il sistema lineare omogeneo associato.

4. Si consideri l'applicazione $F : M_n(K) \to M_n(K)$ data da $F(A) = A + A^t$, essendo A^t la trasposta di A.
i) Verificare che F è un'applicazione lineare di spazi vettoriali.
ii) Determinare i sottospazi vettoriali di $M_n(K)$ che sono rispettivamente nucleo e immagine dell'applicazione lineare F.

5. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la seguente matrice A è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

Scrivere per tali valori k la sua inversa A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = I$.