Algebra Lineare (Prof. P. Piccinni)

Esercitazione scritta del 6.11.2013

1. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\vec{w}_1 = (-1, 1, 3, 1, 2), \vec{w}_2 = (-2, 0, -2, 0, 2),$$

$$\vec{w}_3 = (0, -2, -8, -2, -2), \vec{w}_4 = (-3, -1, -7, -1, 2).$$

Determinare:
i) La dimensione e una base di W.
ii) Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di W.

2. Dati gli insiemi:

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}, \quad Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 1\},$$

$$Z_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x + z = 1\},$$

$$Z_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = 0\}, \quad Z_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

stabilire quali Z_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ognuno dei sottospazi vettoriali determinare una base.

3. Determinare i valori di k per cui il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + t = 1 \\ x + ky = 1 \\ kz + t = 1 \\ y + kt = 1 \end{cases}$$

ammette (a) un'unica soluzione, (b) nessuna soluzione, (c) più di una soluzione.
Esaminare l'analogo problema per il sistema lineare omogeneo associato.

4. Si consideri l'applicazione $F : M_n(K) \to M_n(K)$ data da $F(A) = A + A^t$, essendo A^t la trasposta di A.
i) Verificare che F è un'applicazione lineare di spazi vettoriali.
ii) Determinare i sottospazi vettoriali di $M_n(K)$ che sono rispettivamente nucleo e immagine dell'applicazione lineare F.

5. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la seguente matrice A è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

Scrivere per tali valori k la sua inversa A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = I$.

Soluzioni dell'esercitazione di Algebra Lineare del 6.11.2013 (Piccinni)

Soluzione 1. La matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, la terza riga essendo la somma della seconda con -2 volte la prima e la quarta riga essendo somma delle prime tre. Dunque $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ sono una base di W che ha dimensione 2 ed equazioni parametriche $x_1 = -t_1 - 2t_2, x_2 = t_1, x_3 = 3t_1 - 2t_2, x_4 = t_1, x_5 = 2t_1 + 2t_2$. Le equazioni cartesiane sono ottenute uguagliando a zero tre dei minori di ordine massimo della matrice:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ottenendo p. es. il sistema $x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$, $x_3 - 5x_4 + x_5 = 0$.

Soluzione 2. I sottospazi vettoriali sono Z_1 e Z_4. Una base di Z_1, di dimensione 2, è p. es. data dalle terne (1,-1,0) e (0,0,1). Una base di Z_4, di dimensione 1 è invece data dalla terna (0,1,0).

Soluzione 3. Il determinante dei coefficienti del sistema lineare è, come subito si verifica $k^4+k = k(k+1)(k^2-k+1)$. Ne segue che per $k \neq 0, -1$ sia il sistema assegnato che il sistema lineare omogeneo ad esso associato ammettono un unica soluzione. Per $k = 0$ il sistema diventa $t = 1$, $x = 1$, $t = 1$, $y = 1$ avente per soluzione ogni quaterna $(1, 1, z, 1)$, dunque la retta affine di giacitura la retta vettoriale $(0, 0, z, 0)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per $k = -1$ si ha il sistema $-x+t = 1$, $x-y = 1$, $-z+t = 1$, $y-t = 1$, con rango della matrice dei coefficienti 3 e rango della matrice dei coefficienti e termini noti 4. In questo caso il sistema lineare non ammette soluzioni, mentre il sistema lineare omogeneo associato ammette la retta vettoriale $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ di soluzioni.

Soluzione 4. La verifica della linearità di F è la seguente: $F(A + B) = A + B + (A + B)^t = A + B + A^t + B^t = A + A^t + B + B^t = F(A) + F(B)$, $F(kA) = kA + (kA)^t = kA + kA^t = k(A + A^t) = kF(A)$. Il nucleo di F è costituito dalle matrici A tali che $A + A^t = 0$, ovvero dalle matrici antisimmetriche, caratterizzate da $A = -A^t$. L'immagine di F è costituita dalle matrici B che possono essere scritte come $B = A + A^t$ per qualche $A \in M_n(K)$. Ogni tale B è simmetrica: $B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = B$, e d'altronde ogni B simmetrica può essere scritta come $B = A + A^t$ per $A = \frac{1}{2}B$. Ne segue che l'immagine di F è costituita dal sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche.

Soluzione 5. Sia $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Denotando con $A\vec{x}$ il prodotto righe per colonna, si ha che i tre sistemi

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hanno soluzione se e solo se $k \neq 0$, e in questo caso le soluzioni sono rispettivamente:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue, nei tre casi, e sempre con notazione di prodotto righe per colonna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e ciò fornisce subito gli elementi di

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

$$a_{11} = 0, a_{21} = -\frac{1}{k}, a_{31} = \frac{1}{k}, a_{12} = -\frac{1}{k}, a_{22} = \frac{1}{k}, a_{32} = 0, a_{13} = \frac{1}{k}, a_{23} = 0, a_{33} = 0.$$

Ne segue che A^{-1} è invertibile per ogni $k \neq 0$ e per tali k è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del prodotto righe per colonne mostra d'altronde che:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$