Geometria Differenziale

Foglio1 (2 ottobre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbf{R^2}$ la catenaria C, grafico della funzione coseno iperbolico:

$$y = \cosh x,$$

dunque di equazioni parametriche $x = t,\ y = \cosh t$.

i) Verificare che $s(t) = \sinh t$ definisce un ascissa curvilinea su C e che $t(s) = \log(s + \sqrt{1+s^2})$ ne è funzione inversa.

ii) Determinare il versore tangente $\vec{t}(s)$, la curvatura $k(s)$ e il versore normale $\vec{n}(s)$ su C.

Esercizio 2. Si consideri sulla sfera $S^2(r)$, di equazioni parametriche

$$\beta(\theta,\varphi): \quad x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

la curva C definita dalle condizioni

$$\theta = t, \quad \varphi = \log(\tan\frac{t}{2}) \qquad (0 \le t \le \pi).$$

i) Scrivere la parametrizzazione $\alpha(t)$ di C in $\mathbf{R^3}$, usando il parametro t sopra definito.

ii) Scrivere le tre componenti del vettore tangente $\alpha'(t)$ e determinare il suo modulo $|\alpha'(t)|$.

iii) Scrivere, nei punti P di C, le tre componenti del vettore tangente $\beta_\theta(\theta,\varphi)$ al meridiano di S^2 passante per P e descritto dal parametro θ.

iv) Calcolare il prodotto scalare $< \alpha'(t), \beta_\theta(t,\varphi(t)) >$, e verificare che la curva C forma un angolo costante $\frac{\pi}{4}$ con i meridiani di $S^2(r)$.

La curva C è detta *lossodromica* di angolo $\frac{\pi}{4}$.

v) Calcolare la lunghezza di C, in corrispondenza dell'intervallo $0 \le t \le \pi$.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ la curva C parametrizzata da

$$\alpha(t): \ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = e^t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

i) Calcolare le funzioni di curvatura $k(t)$ e di torsione $\tau(t)$ su C.

ii) Determinare nel punto $P_0 = (1,0,1)$ i versori $\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$ del triedro di Frenet di C.

Esercizio 4. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ la curva D parametrizzata da

$$\alpha(t): \ x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\ z = \sin t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

i) Calcolare il triedro di Frenet e le funzioni di curvatura $k(t)$ e di torsione $\tau(t)$ su D.

ii) Scrivere le equazioni della retta tangente e del piano osculatore di D nell'origine O.