Geometria Differenziale

Foglio2 (9 ottobre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ la superficie T, di equazioni parametriche

$$\alpha(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= (a + r\cos u)\cos v \\ y(u,v) &= (a + r\cos u)\cos v \\ z(u,v) &= r\sin u \end{cases}$$

essendo $0 < r < a$ e $0 \leq u, v \leq 2\pi$.

i) Verificare che T è ottenuta per rotazione attorno all'asse z della circonferenza C (meridiano) $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ del piano xz. Si deduca quindi che T è un toro.

ii) Eliminando i parametri u, v dalle equazioni parametriche, scrivere l'equazione cartesiana di T nelle coordinate (x, y, z), constatando che T è una *quartica*, ovvero una superficie algebrica di ordine 4.

iii) Scrivere, in funzione di u, v, i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale su T.

iv) Calcolare l'area dell'intera superficie di T, $0 \leq u, v \leq 2\pi$, constatando che essa è il prodotto della lunghezza della circonferenza meridiano C per la lunghezza della circonferenza C' descritta per rotazione del centro di C attorno all'asse z.

Esercizio 2. Si consideri la superficie H di $\mathbf{R^3}$ di equazioni parametriche

$$\beta(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= v\cos u \\ y(u,v) &= v\sin u \\ z(u,v) &= u \end{cases}$$

essendo $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 1$.

i) Verificare che H consiste dei segmenti orizzontali che uniscono l'asse z con i punti dell'elica circolare $x = \cos u, y = \sin u, z = u$. La superficie H è detta *elicoide*.

ii) Verificare che $u = u, v = \sinh t$ è un cambiamento di variabili con determinante jacobiano ovunque positivo e determinare il corrispondente dominio di definizione delle nuove variabili (u, t).

iii) Riparametrizzato l'elicoide H con $\tilde{\beta}(u,t) = \beta(u, \sinh t)$, verificare che le tre componenti $\tilde{x}(u,t), , \tilde{y}(u,t), \tilde{z}(u,t)$ di $\tilde{\beta}(u,t)$ sono funzioni armoniche di u, t, ovvero:

$$\Delta\tilde{x} = x_{uu} + x_{tt} \equiv 0, \quad \Delta\tilde{y} = y_{uu} + y_{tt} \equiv 0, \quad \Delta\tilde{z} = z_{uu} + z_{tt} \equiv 0.$$

iv) Calcolare l'area della superficie H, con le assegnate limitazioni dei parametri.

Esercizio 3. Calcolare l'area delle superficie del parabolone ellittico di $\mathbf{R^3}$ definito dall'equazione

$$z = x^2 + y^2,$$

descritta dalla limitazione $z \leq 1$.