Geometria Differenziale

Foglio3 (14 ottobre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbf{R}^3$ la superficie torica T, di equazioni parametriche

$$\alpha(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= (a + r\cos u)\cos v \\ y(u,v) &= (a + r\cos u)\cos v \\ z(u,v) &= r\sin u \end{cases}$$

essendo $0 < r < a$ e $0 \leq u, v \leq 2\pi$. Si ricordi, dalla soluzione del Foglio2, che i coefficienti della prima forma fondamentale di T sono

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r\cos u)^2$$

i) Scrivere il versore normale $\vec{N}(u,v)$ e i coefficienti l, m, n della seconda forma fondamentale di T.

ii) Determinare la curvatura media H, la curvatura gaussiana K e le curvature principali k_1, k_2 di T.

iii) Si osservi che tutte le curvature H, K, k_1, k_2 sono funzioni del solo parametro u. Come si interpreta geometricamente la loro indipendenza da v?

Esercizio 2. Si consideri l'elicoide $\mathcal{H}$ di $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\beta(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= v\cos u \\ y(u,v) &= v\sin u \\ z(u,v) &= u \end{cases}$$

essendo $0 \leq u \leq 2\pi$ e $v \in \mathbf{R}$. Si ricordi, dalla soluzione del Foglio2, che i coefficienti della prima forma fondamentale di $\mathcal{H}$ sono

$$E = 1 + v^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

(ovvero $E = G = \cosh^2 t, F = 0$ usando la sostituzione $u = u, v = \sinh t$ proposta nel Foglio2).

i) Scrivere il versore normale $\vec{N}(u,v)$ e i coefficienti l, m, n della seconda forma fondamentale di $\mathcal{H}$.

ii) Determinare la curvatura media H, la curvatura gaussiana K e le curvature principali k_1, k_2 di $\mathcal{H}$.

iii) Sia ora S un'arbitraria superficie parametrizzata

$$\alpha(u,t) = (x(u,t), y(u,t), z(u,t))$$

e assumiamo che (u,t) siano *parametri conformi* per S, ovvero che i coefficienti, calcolati rispetto ad essi, della prima forma fondamentale di S verifichino le condizioni

$$E(u,t) = G(u,t), \quad F(u,t) = 0.$$

Verificare che in questa ipotesi risulta verificata l'identità:

$$\alpha_{uu} + \alpha_{tt} = \Delta\alpha = 2\lambda^2 H(u,t)\vec{N}(u,t),$$

essendo $\lambda^2 = E(u,t) = G(u,t)$.

Esercizio 3. Calcolare la curvatura gaussiana dei paraboloidi ellittico e iperbolico $\mathbf{R}^3$ definiti dalle equazioni

$$z = x^2 \pm y^2.$$