Geometria Differenziale

Foglio4 (23 ottobre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Usando la formula di Eulero

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

dimostrare che se $k_1 < k_2$, allora le curvature principali k_1 e k_2 sono, al variare dell'angolo φ compreso tra la direzione principale di k_1 e la sezione normale con curvatura k_n rispettivamente il minimo e il massimo di k_n.

Esercizio 2. Si consideri la sfera $\mathcal{S}^2(r)$ di $\mathbf{R^3}$ di equazioni parametriche

$$\alpha(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= r \sin u \cos v \\ y(u,v) &= r \sin u \sin v \\ z(u,v) &= r \cos u \end{cases}$$

essendo $0 \leq u \leq \pi$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

i) Scrivere il versore normale $\vec{N}(u,v)$ e i coefficienti E, F, G e l, m, n della prima e della seconda forma fondamentale di $S^2(r)$.

ii) Determinare la curvatura media H, la curvatura gaussiana K e le curvature principali k_1, k_2 di $S^2(r)$.

iii) Posto $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, calcolare l'area $\int_{S^2(r)} dA$ della superficie sferica e l'integrale $\int_{S^2(r)} K dA$.

Esercizio 3. Si consideri la superficie torica T^2 di $\mathbf{R^3}$, di equazioni parametriche

$$\alpha(u,v) : \begin{cases} x(u,v) &= (a + r \cos u) \cos v \\ y(u,v) &= (a + r \cos u) \cos v \\ z(u,v) &= r \sin u \end{cases}$$

con $0 < r < a$ e $0 \leq u, v \leq 2\pi$. Si ricordi dal foglio 3 che T^2 ha coefficienti della prima e seconda forma fondamentale rispettivamente

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r \cos u)^2,$$

$$l = r, \quad m = 0, \quad n = \cos u(a + r \cos u),$$

e che pertanto la curvatura gaussiana di T^2 è data da

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

i) Posto $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, calcolare l'area $\int_{T^2} dA$ della superficie torica e l'integrale $\int_{T^2} K dA$.

ii) Calcolare la curvatura media H e le curvature principali k_1 e k_2 su T^2.

Esercizio 4. Si scrivano le equazioni parametriche

$$\alpha(u,t) = (x(u,t), y(u,t), z(u,t)),$$

con u parametro di rotazione ($0 \leq u \leq 2\pi$) e $z(u,t) = t$, della superficie di rotazione S, generata ruotando la catenaria $x = \cosh z$ del piano xz attorno all'asse z. Tale superficie S è detta *catenoide.*

i) Scrivere il versore normale $\vec{N}(u,t)$ e calcolare i coefficienti E, F, G e l, m, n della prima e della seconda forma fondamentale di S.

ii) Determinare la curvatura media H, la curvatura gaussiana K e le curvature principali k_1, k_2 di S.

iii) Osservato che in ogni punto di S valgono le identità $E = G, F = 0$, si verifichi che le funzioni $x(u,t), y(u,t), z(u,t)$ sono armoniche. Si confronti poi con quanto visto nell'esercizio 2, punto iii), del foglio 3.