Geometria Differenziale

Foglio5 (6 novembre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ l'iperboloide iperbolico $\mathcal{H}$ (in figura) di equazione cartesiana

$$\mathcal{H}: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

i) Verificare che le intersezioni di $\mathcal{H}$ con i piani contenenti l'asse z sono iperboli, e calcolare la curvatura di tali iperboli nei loro due punti con $z = 0$.

ii) Osservare che l'interzezione di $\mathcal{H}$ con il piano xy è la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $x = \cos u,\ y = \sin u,\ z = 0$. Si può affermare che $\mathcal{C}$ è una sezione normale? E le altre circonferenze $\mathcal{C}'$ su $\mathcal{H}$ parallele a $\mathcal{C}$?

iii) Si consideri per ogni punto $P_u = (\cos u,\ \sin u,\ 0) \in \mathcal{C}$, una retta r_u di $\mathbf{R^3}$, dunque di equazioni parametriche

$$r_u: \quad x = \cos u + vl(u),\ y = \sin u + vm(u),\ z = vn(u),$$

essendo $(l(u), m(u), n(u))$ i parametri direttori di r_u, ed essendo v il parametro lineare che descrive i punti di r_u.

iv) Determinare le funzioni $l(u), m(u), n(u)$ in modo che le rette r_u appartengano a $\mathcal{H}$. Si constati che esistono due scelte per tali terne di funzioni, coerentemente con la figura che evidenzia l'esistenza di due rette $r_u \subset \mathcal{H}$ per ogni $P_u \in \mathcal{C}$ (le due schiere di rette sull'iperboloide iperbolico).

v) Effettuata una delle due scelte possibili per la terna $(l(u), m(u), n(u))$ ottenuta al punto iv), la si utilizzi per scrivere le equazioni parametriche di $\mathcal{H}$ come superficie rigata:

$$\mathcal{H}: \quad x = \cos u + vl(u),\ y = \sin u + vm(u),\ z = vn(u), \qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbf{R}$$

e si utilizzino tali equazioni per determinare i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali di $\mathcal{H}$, e le funzioni su di essa di curvatura media $H(u, v)$, e di curvatura gaussiana $K(u, v)$.

Esercizio 2. Le equazioni parametriche di $\mathcal{H}$ scritte in risposta al punto v) dell'esercizio 1 guardano ad $\mathcal{H}$ come superficie rigata. Vi sono certamente altre possibilità di scrivere equazioni parametriche di $\mathcal{H}: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

i) Scrivere le equazioni parametriche $x = x(t), z = z(t)$ dell'iperbole $\mathcal{D}$ sezione di $\mathcal{H}$ del piano xz.

ii) Scrivere di conseguenza equazioni parametriche di $\mathcal{H}$, pensandola come superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse z dell'iperbole $\mathcal{D}$.

iii) Un'altra possibilità è scrivere $\mathcal{H}$ come unione dei due grafici di funzione $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Vi sono problemi di regolarità C^∞ con questa rappresentazione?

iv) Perseguendo scelte diverse di rappresentazione parametrica si ottengono in un punto fissato $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}$ gli stessi valori di E, F, G? E lo stesso versore normale $\vec{N}$? E gli stessi l, m, n? E per quanto riguarda la curvatura media H? E la curvatura gaussiana K?

Esercizio 3. Si ripercorrano i quesiti degli esercizi 1 e 2 per l'iperboloide ellittico $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R^3}$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{E}: \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Si tratta ancora di una superficie rigata? E di rotazione? Come si possono scrivere equazioni parametriche di $\mathcal{E}$? Si possono ottenere le curvature di $\mathcal{E}$ utilizzando il grafico della funzione $x = \sqrt{y^2 + z^2 + 1}$?