Geometria Differenziale

Foglio6 (27 novembre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Sia $S \subset \mathbf{R^3}$ una superficie regolare dello spazio euclideo, rappresentata da equazioni parametriche $\alpha(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

i) Si dimostri che il piano vettoriale tangente T_pS, definito come piano generato dai vettori $\alpha_u, \alpha_v \in \mathbf{R^3}$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathcal{D}(p)$ delle derivazioni sulle funzioni C^∞ in un intorno di p.

Sia poi $N : S \to S^2$ l' applicazione di Gauss di S. Si consideri la definizione del differenziale $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2$ in $p \in S$ data nella prima parte del corso, facendo riferimento a vettori $\vec{v} \in T_pS$ come vettori velocità di curve: $\vec{v} = \alpha'(0)$, dove $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R} \to S$, $\alpha(0) = p$ e im $\alpha \subset S$.

ii) Verificare che tale definizione di dN_p è equivalente a quella del differenziale come definita in questa settimana utilizzando le derivazioni sulle funzioni C^∞.

[Per tutto ciò si veda anche: Abate - Tovena, *Curve e Superfici*, Teorema 3.4.15 e Lemma 3.4.22, pp. 142-145].

Esercizio 2. Sia $F : M^m \to N^n$ un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili, espressa in coordinate locali $(x_1, \dots, x_m)$ attorno a $p \in M$ e $(y_1, \dots, y_n)$ attorno a $F(p) \in N$ dal sistema di funzioni

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases} .$$

Dimostrare che nelle basi $\mathbb{E}_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)|_p$ di T_pM e $\mathbb{E}_{F(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)|_{F(p)}$ di $T_{F(p)}N$ il differenziale

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

si rappresenta con la matrice jacobiana $J_F|_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_p\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, ovvero che con simbolismo matriciale:

$$dF_p(\mathbb{E}_p) = \mathbb{E}_{F(p)} J_F|_p.$$

Esercizio 3. Si consideri l'insieme

$$Gr_2(\mathbf{R^4}) = \{\text{sottospazi vettoriali di dimensione 2 di } \mathbf{R^4}\},$$

che si dice *varietà di Grassmann dei 2-piani di* $\mathbf{R^4}$. Similmente può definirsi $Gr_k(\mathbf{R^{n+1}})$, varietà di Grassmann dei $k-$piani di $\mathbf{R^{n+1}}$, e si noti che $Gr_1(\mathbf{R^{n+1}}) = \mathbf{R}P^n$. Dunque le varietà di Grassmann sono generalizzazioni naturali degli spazi proiettivi.

i) (Quesito topologico). Ricordando che la topologia euclidea su $\mathbf{R}P^n$ si definisce con la costruzione della topologia quoziente da $\mathbf{R^{n+1}}$ o da S^n, si rifletta su come sia possibile definire una topologia euclidea sulle varietà di Grassmann, e in particolare su $Gr_2(\mathbf{R^4})$. A tale scopo è utile leggere i successivi punti ii) e iii).

ii) Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbf{R})$$

che soddisfino la condizione rango$A = 2$. L'insieme $F_2\mathbf{R^4}$ di tali matrici A si dice *varietà dei 2-riferimenti di* $\mathbf{R^4}$. Esso ha una naturale struttura di varietà differenziabile. Si stabilisca perché, indicando dimensione e sistemi di coordinate locali in $F_2\mathbf{R^4}$.

iii) Si noti che vi è una naturale proiezione

$$\pi : F_2(\mathbf{R^4}) \longrightarrow Gr_2(\mathbf{R^4})$$

che associa a ogni 2-riferimento il 2-piano che esso genera.

iv) Si considerino ora i seguenti 6 sottoinsiemi di $F_2(\mathbf{R^4})$:

$$F_{ij} = \{A \in F_2(\mathbf{R^4}) \text{ tali che il minore di ordine 2 formato dalle colonne di indici } i,\ j \text{ sia non nullo}\},$$

e si verifichi che essi sono aperti.

v) Verificare che se $A \in F_{ij}$, allora $gA \in F_{ij}$ per ogni $g \in GL(2, \mathbf{R})$. Dedurne che per ogni $A \in F_{ij}$ esiste una $h \in GL(2, \mathbf{R})$ tale che hA abbia la matrice identica come sottomatrice di colonne i, j.

vi) Si ponga poi $U_{ij} = \pi F_{ij}$. Si verifichi che gli U_{ij} sono sei aperti che ricoprono la varietà di Grassmann $Gr_2(\mathbf{R^4})$ e che le considerazioni del precedente punto v) permettono di introdurre su ogni $U_{ij} \subset Gr_2(\mathbf{R^4})$ quattro coordinate locali.

vii) Si verifichi che i sistemi di coordinate locali di cui al punto vi) sono a due a due C^∞ compatibili e conferiscono a $Gr_2(\mathbf{R^4})$ una struttura di varietà differenziabile di dimensione 4.

viii) Più in generale, qual'è la dimensione della varietà differenziabile $Gr_k(\mathbf{R^{n+1}})$?

ix) Gli spazi proiettivi sono compatti. Questo è vero più in generale per le varietà di Grassmann $Gr_k(\mathbf{R^{n+1}})$?