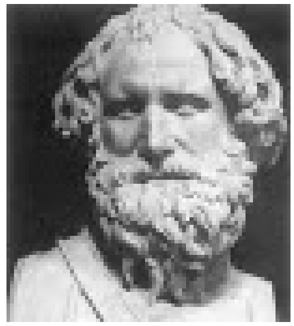
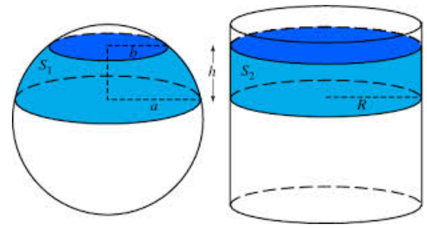
Geometria Differenziale

Foglio7 (9 dicembre 2015) - Prof. P. Piccinni





Esercizio (La tomba di Archimede) Secondo la tradizione, la tomba di Archimede (287-212 a. C.) aveva la forma di una sfera S^2 iscritta in un cilindro C. Nella sua opera *Della sfera e del cilindro*, Archimede dimostrò che l'applicazione $F : S^2 \to C$ che a $P \in S^2$ associa il punto $F(P) \in C$, ottenuto intersecando C con la semiretta orizzontale passante per P e uscente dall'asse del cilindro, conserva le aree. In particolare la superficie totale della sfera $4\pi r^2$ è uguale alla superficie laterale del cilindro, ottenuta come prodotto della circonferenza di base $2\pi r$ per l'altezza $2r$.

Ricordiamo che sfera e cilindro non sono localmente isometriche. Ciò è conseguenza del teorema egregium: la curvatura gaussiana è $K = \frac{1}{r^2}$ sulla sfera e $K = 0$ sul cilindro. Tuttavia tra esse esiste un'applicazione che conserva le aree. Ciò si esprime dicendo che sfera e cilindro sono localmente equivalenti *come varietà simplettiche*, ovvero l'applicazione F sopra descritta, pur non conservando i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale, conserva la 2-forma d'area dA che si scrive in termini di E, F, G.

Di fatto nel XX secolo, ovvero circa 22 secoli dalla sua formulazione, il teorema di Archimede appare come prototipo di fondamentali nozioni di geometria simplettica.

Ora l'esercizio.

i) Siano S^2_r la sfera di raggio r e il cilindro C_r ad essa circoscritto, di equazioni parametriche rispettivamente

$$S^2_r : \begin{cases} x(\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = r\cos\theta \end{cases} , \qquad C_r : \begin{cases} x(u,v) = r\cos u \\ y(u,v) = r\ sinu \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

essendo $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, nonché $-r \leq v \leq r$ e $0 \leq u \leq 2\pi$. Calcolare i coefficienti $E(\theta,\varphi), F(\theta,\varphi), G(\theta,\varphi)$, $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ delle prime forme fondamentali di S^2_r e di C_r.

ii) Scrivere le 2-forme d'area

$$dA_{S^2_r} = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta \wedge d\varphi, \qquad dA_{C_r} = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$$

per le due superfici.

iii) Esprimere l'applicazione differenziabile $F : S^2_r \to C_r$ mediante una coppia di funzioni C^∞

$$u = f_1(\theta,\varphi),\ v = f_2(\theta,\varphi).$$

iv) Scrivere la 2-forma indotta $F^* dA_{C_r}$ e constatare che essa coincide (a meno del segno) con $dA_{S^2_r}$.

v) Le precedente verifica è stata effettuata nelle coordinate locali (θ,φ) di S^2_r e (u,v) di C_r. Si può afferamre che essa vale per qualunque sistema di coordinate locali delle strutture differenziabili su S^2_r e di C_r? Perché?

vi) Dedurne che l'area della regione R su S^2_r definita da $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ coincide con l'area della regione $F(R)$ su C_r.