Geometria Differenziale

Foglio8 (21 dicembre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Con riferimento alle coordinate (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$, si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega = (xyz + 1)\ (dx + dy + dz).$$

i) Scrivere le espressioni della 2-forma $d\omega$ e della 3-forma $\omega \wedge d\omega$.
ii) Sia $S^1 :\ x = cos\ t,\ y = sen\ t,\ z = 0\ (t \in [0, 2\pi])$ la circonferenza unitaria del piano xy. Calcolare $\int_{S^1} \omega$.
iii) Sia S^2 la 2-sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ e sia $S^2_+ = S^2 \cap \{z \geq 0\}$ il suo emisfero superiore. Calcolare $\int_{S^2} d\omega$ e $\int_{S^2_+} d\omega$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ è assegnata la 1–forma ω, definita ponendo per ogni $P = (x, y, z)$ e per ogni $\mathbf{v}_P = (v_x, v_y, v_z)$

$$\omega_P(\mathbf{v}_P) = \frac{1}{2}(x\, v_x + y\, v_y + z\, v_z).$$

(i) Scrivere l'espressione di ω nella forma

$$\omega = a(x, y, z)\, dx + b(x, y, z)\, dy + c(x, y, z)\, dz,$$

determinando le funzioni coefficiente $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ e verificare che ω è esatta.

(ii) Determinare la primitiva f di $\omega = df$ tale che $f(O) = 0$.

(iii) Determinare le superfici equipotenziali (le superfici $f(P)$ =costante) e calcolare ω sui vettori tangenti a tali superfici.

Esercizio 3. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\phi = \frac{x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2}dy$$

definita in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(i) Si calcoli l'integrale $\int_{S^1(r)} \phi$, essendo $S^1(r)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r con orientazione antioraria.

(ii) Stabilire se ϕ è chiusa e se è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(iii) Scrivere la 1-forma differenza $\psi = \phi - \omega_0$, essendo

$$\omega_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

la 1-forma d'angolo ($\omega_0 =$ "$d\theta$"), e stabilire se ψ è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(iv) Individuare insiemi aperti A_ϕ, A_{ω_0}, A_ψ di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ in cui le 1-forme rispettivamente ϕ, ω_0, ψ siano esatte.

Esercizio 4. Si considerino, sul quadrato

$$Q = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } t \in [-\pi, \pi], u \in [-\pi, \pi]\},$$

le 1-forme differenziali:

$$\omega_1 = dt \quad \omega_2 = (2 + \cos t)\ du, \quad \psi = \sin t\ du.$$

(i) Scrivere le 2-forme $d\psi$ e $\omega_1 \wedge \omega_2$ e determinare la funzione $\widetilde{K}(t, u)$ tale che

$$d\psi = \widetilde{K}(t, u)\ \omega_1 \wedge \omega_2.$$

(ii) Calcolare l'integrale $\int_Q d\psi$.

(iii) Sia $\phi : Q \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita dalla formula:

$$\phi(t, u) = ((2 + \cos t)\ \cos u, (2 + \cos t)\ \sin u, \sin t).$$

Si calcoli la curvatura gaussiana K della superficie regolare S,(che si riconosce subito essere un toro), parametrizzata da $\phi(t, u)$, e si confronti tale curvatura gaussiana K con la funzione $\widetilde{K}$ del punto (i). Calcolare quindi $\int_S K\ dA$, dove $dA = \sqrt{EG - F^2}\ dt \wedge du$ è la 2-forma elemento d'area sulla superficie S.

(iv) Utilizzando i calcoli svolti per rispondere al quesito (iii), stabilire se la somma di quadrati

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = dt^2 + (2 + \cos t)^2\ du^2$$

può essere identificata con l'espressione nei parametri locali (t, u) di qualche invariante significativo della superficie S.