Geometria Differenziale

Foglio8 (21 dicembre 2015) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Con riferimento alle coordinate (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$, si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega = (xyz + 1)\ (dx + dy + dz).$$

i) Scrivere le espressioni della 2-forma $d\omega$ e della 3-forma $\omega \wedge d\omega$.
ii) Sia $S^1 :\ x = cos\ t,\ y = sen\ t,\ z = 0\ (t \in [0, 2\pi])$ la circonferenza unitaria del piano xy. Calcolare $\int_{S^1} \omega$.
iii) Sia S^2 la 2-sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ e sia $S^2_+ = S^2 \cap \{z \geq 0\}$ il suo emisfero superiore. Calcolare $\int_{S^2} d\omega$ e $\int_{S^2_+} d\omega$.

Soluzione: i) Dalle definizioni del differenziale esterno d e del prodotto esterno $\wedge$ si ha subito:

$$d\omega = (yz - xz)\ dx \wedge dy + (yz - xy)\ dx \wedge dz + (xz - xy)\ dy \wedge dz,$$

$$\omega \wedge d\omega = (xyz + 1)\ [(yz - xz) - (yz - xy) + (xz - xy)]\ dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

ii) La restrizione di ω al piano xy e' la 1-forma $\omega_{|z=0} = dx + dy$. Differenziando le equazioni parametriche di S^1 si ha: $dx = -sen\ t\ dt, dy = cos\ tdt$. Ne segue: $\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} (-sen\ t + cos\ t)\ dt = 0$.
iii) Essendo S^2 una varieta' senza bordo e $d\omega$ una 2-forma esatta, il teorema di Stokes fornisce subito che $\int_{S^2} d\omega = 0$. Il bordo di S^2_+ e' invece $\partial S^2_+ = S^1$. Dunque ancora il teorema di Stokes consente di ottenere:

$$\int_{S^2_+} d\omega = \int_{\partial S^2_+} \omega = \int_{S^1} \omega = 0.$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ è assegnata la 1–forma ω, definita ponendo per ogni $P = (x, y, z)$ e per ogni $\mathbf{v}_P = (v_x, v_y, v_z)$

$$\omega_P(\mathbf{v}_P) = \frac{1}{2}(x\, v_x + y\, v_y + z\, v_z).$$

(i) Scrivere l'espressione di ω nella forma

$$\omega = a(x, y, z)\, dx + b(x, y, z)\, dy + c(x, y, z)\, dz,$$

determinando le funzioni coefficiente $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ e verificare che ω è esatta.

(ii) Determinare la primitiva f di $\omega = df$ tale che $f(O) = 0$.

(iii) Determinare le superfici equipotenziali (le superfici $f(P)$ =costante) e calcolare ω sui vettori tangenti a tali superfici.

Soluzione. (i) Si verifica facilmente che

$$\omega = \frac{1}{2}(x\, dx + y\, dy + z\, dz)$$

Segue che $d\omega = 0$. Essendo ω chiusa in $\mathbf{E}^3$, è esatta, per il Lemma di Poincaré.

(ii) Le primitive di ω possono calcolarsi imponendo che

$$\omega = df = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz$$

Si ricava $f(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + c$, con c costante. La condizione $f(O) = 0$ implica $c = 0$.

(iii) Le superfici equipotenziali sono sfere di centro O e il singolo punto O. Dalla definizione di ω, essendo i vettori tangenti ad una sfera ortogonali al raggio vettore OP, si trae che ω vale 0 su tali vettori.

Esercizio 3. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\phi = \frac{x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy$$

definita in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(i) Si calcoli l'integrale $\int_{S^1(r)} \phi$, essendo $S^1(r)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r con orientazione antioraria.

(ii) Stabilire se ϕ è chiusa e se è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(iii) Scrivere la 1-forma differenza $\psi = \phi - \omega_0$, essendo

$$\omega_0 = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

la 1-forma d'angolo ($\omega_0 =$ "$d\theta$"), e stabilire se ψ è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

(iv) Individuare insiemi aperti A_ϕ, A_{ω_0}, A_ψ di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ in cui le 1-forme rispettivamente ϕ, ω_0, ψ siano esatte.

Soluzione: (i) Dalle equazioni parametriche di $S^1(r)$: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si ha subito $x^2+y^2 = r^2$, $dx = -r\sin\theta$, $dy = r\cos\theta$, da cui subito:

$$\int_{S^1(r)} \phi = \int_0^{2\pi} (-\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)d\theta = 2\pi.$$

(ii) + (iii) Si può subito considerare la 1-forma differenza

$$\psi = \phi - \omega_0 = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \frac{1}{2}d\log(x^2+y^2),$$

che è dunque esatta in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. Poiché ω_0 è chiusa ma non esatta in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, ne segue che anche ϕ è chiusa ma non esatta in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. In alternativa, un calcolo diretto mostra che ϕ è chiusa e il calcolo dell'integrale indicato al punto (i) mostra che ϕ non è esatta in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$.

(iv) Gli insiemi aperti richiesti sono p. es. $A_\phi = A_{\omega_0} = \mathbf{R}^2 - \{(x,0),\, x \geq 0\}$, $A_\psi = \mathbf{R}^2 - \{0\}$. I primi due infatti sono stellati (p. es. rispetto al punto $(-1,0)$) e dunque in essi le 1-forme chiuse ϕ e ω_0 sono esatte; il terzo può evidentemente essere scelto coincidere con l'intero $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, risultando in esso esatta la 1-forma ψ.

Esercizio 4. Si considerino, sul quadrato

$$Q = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } t \in [-\pi,\pi], u \in [-\pi,\pi]\},$$

le 1-forme differenziali:

$$\omega_1 = dt, \quad \omega_2 = (2+\cos t)\ du, \quad \psi = \sin t\ du.$$

(i) Scrivere le 2-forme $d\psi$ e $\omega_1 \wedge \omega_2$ e determinare la funzione $\widetilde{K}(t,u)$ tale che

$$d\psi = \widetilde{K}(t,u)\ \omega_1 \wedge \omega_2.$$

(ii) Calcolare l'integrale $\int_Q d\psi$.

(iii) Sia $\phi : Q \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita dalla formula:

$$\phi(t,u) = ((2+\cos t)\ \cos u, (2+\cos t)\ \sin u, \sin t).$$

Si calcoli la curvatura gaussiana K della superficie regolare S,(che si riconosce subito essere un toro), parametrizzata da $\phi(t,u)$, e si confronti tale curvatura gaussiana K con la funzione $\widetilde{K}$ del punto (i). Calcolare quindi $\int_S K\ dA$, dove $dA = \sqrt{EG - F^2}\ dt \wedge du$ è la 2-forma elemento d'area sulla superficie S.

(iv) Utilizzando i calcoli svolti per rispondere al quesito (iii), stabilire se la somma di quadrati

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = dt^2 + (2+\cos t)^2\ du^2$$

può essere identificata con l'espressione nei parametri locali (t,u) di qualche invariante significativo della superficie S.

Soluzione: (i) Dalle definizioni del prodotto esterno $\wedge$ e del differenziale esterno d si ha subito:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (2+\cos t)\ dt \wedge du, \qquad d\psi = \cos t\ dt \wedge du,$$

e la funzione richiesta è quindi: $\widetilde{K}(t,u) = \frac{\cos t}{2+\cos t}$.

(ii) L'integrale può calcolarsi per esempio con il teorema di Stokes. Risulta $\partial Q = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, essendo c_1, c_2, c_3, c_4 i segmenti orientati del piano (t,u) appresso descritti:

$$c_1 = (0,0) \to (1,0), \qquad c_2 = (1,0) \to (1,1),$$

$$c_3 = (1,1) \to (0,1), \qquad c_4 = (0,1) \to (0,0).$$

Poiche' la 1-forma ψ è nulla su c_1 e c_3 (non contenendo dt), risulta:

$$\int_Q d\psi = \int_{\partial Q} \psi = \int_{c_2} \psi + \int_{c_4} \psi = \int_0^1 \sin t \ du + \int_1^0 \sin t \ du = 0.$$

(iii) Le derivate parziali della parametrizzazione ϕ e il loro prodotto vettoriale normalizzato sono rispettivamente:

$$\phi_t = (-\sin t \ \cos u, -\sin t \ \sin u, \cos t), \quad \phi_u = (-(2+\cos t) \ \sin u, (2+\cos t) \ \cos u, 0),$$

$$\vec{N} = \frac{\phi_t \wedge \phi_u}{|\phi_t \wedge \phi_u|} = (-\cos t \ \cos u, -\cos t \ \sin u, -\sin t),$$

e le derivate seconde sono:

$$\phi_{tt} = (-\cos t \ \cos u, -\cos t \ \sin u, -\sin t),$$

$$\phi_{tu} = (\sin t \ \sin u, -\sin t \ \cos u, 0),$$

$$\phi_{uu}(-(2+\cos t) \ \cos u, -(2+\cos t) \ \sin u, O).$$

Abbiamo dunque i coefficienti delle due forme fondamentali:

$$E = 1, F = 0, G = (2+\cos t)^2, \ L = 1, M = 0, N = (2+\cos t)\cos t,$$

e la curvatura gaussiana:

$$K = \frac{\cos t}{2+\cos t},$$

che coincide con la funzione $\widetilde{K}$ del punto (i). Dal calcolo effettuato al punto (ii) segue dunque che $\int_S K \ dA = \int_Q \frac{\cos t}{2+\cos t} \ (2+\cos t) \ dt \wedge du = \int_Q d\psi = 0$.

(iv) Confrontando l'espressione $\omega_1^2 + \omega_2^2 = dt^2 + (2+\cos t)^2 du^2$ con i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale del toro S si riconosce subito che l'invariante richiesto è il quadrato ds^2 dell'elemento di lunghezza su S. Infatti:

$$ds^2 = E \ dt^2 + 2F \ dt \ du + G \ du^2 = dt^2 + (2+\cos t)^2 \ du^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$