Geometria Differenziale

Foglio9 (11 gennaio 2016) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x, y), siano date le forme differenziali

$$\omega = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + x\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right) dy, \qquad \eta = \frac{2y(x-1)}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy$$

i) Determinare gli aperti A_ω e A_η ove ω ed η, rispettivamente, sone definite.

ii)) Stabilire se le forme assegnate sono esatte. In caso affermativo scriverne una primitiva.

iii) Sia $c : [1, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la corona circolare parametrizzata da

$$c(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

e con bordo $\partial c = S^1_2 \cup S^1_1$, l'unione delle due circonferenze (opportunamente orientate!) di centro l'origine e di raggio rispettivamente 2 e 1. Calcolare i due integrali:

$$\int_{\partial c} \omega \,, \qquad \int_c \eta.$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ e con riferimento a coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3, x_4), si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + x_3 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}.$$

i) Calcolare il differenziale $d\omega$.

ii) Si consideri in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, per ogni $r > 0$, la 3-sfera di raggio r:

$$\alpha_r : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^4 - \{0\},$$

definita dalle seguenti equazioni parametriche (dove $\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], \psi \in [0, \pi]$):

$$\alpha_r(\theta, \varphi, \psi) = \begin{cases} x_1 = r\ \cos\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi, \\ x_2 = r\ \sin\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi, \\ x_3 = r\ \cos\varphi\ \sin\psi, \\ x_4 = r\ \cos\psi. \end{cases}$$

Calcolare l'integrale $\int_{\alpha_r} \omega$ e discutere la sua dipendenza da r.

iii) Il risultato del precedente calcolo fornisce qualche informazione sull'esattezza di ω in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$?

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z):

a) il *semicilindro* (aperto) $\mathcal{S}$ definito dalle condizioni $(x^2 + y^2 = 1,\ z > 0)$,

b) il paraboloide ellittico $\mathcal{T}$ di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$.

Si consideri poi l'applicazione differenziabile $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x, y, z) = (xz, yz, z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathcal{S}.$$

i) Verificare che f ha valori nel paraboloide ellittico $\mathcal{T}$ e individuare il sottoinsieme $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ immagine di f.

ii) Dimostrare che $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}_0$ è un diffeomorfismo, costruendo la sua inversa $g : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{S}$.

iii) Fissato in $\mathcal{S}$ il punto $P = (0, 1, 2)$, si indichino due parametrizzazioni locali di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{T}$ intorno rispettivamente ai punti P e $f(P)$. Determinare quindi la matrice del differenziale $df_P : T_P\mathcal{S} \to T_{f(P)}\mathcal{T}$, rispetto alle basi indotte sui due piani tangenti dalle due parametrizzazioni scelte.

iv) Sia $\mathcal{C}$ l'elica circolare (contenuta in $\mathcal{S}$) parametrizzata da $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \frac{4}{\pi}t)$ con $t > 0$. Detto $\vec{v}$ il vettore tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \alpha(\frac{\pi}{2})$, determinare il vettore immagine $df_P(\vec{v})$, anche eventualmente utilizzando la matrice del differenziale df_P ottenuta al punto iii).