Geometria Differenziale

Foglio9 (11 gennaio 2016) - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x, y), siano date le forme differenziali

$$\omega = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + x\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right) dy, \qquad \eta = \frac{2y(x-1)}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy$$

i) Determinare gli aperti A_ω e A_η ove ω ed η, rispettivamente, sone definite.

ii)) Stabilire se le forme assegnate sono esatte. In caso affermativo scriverne una primitiva.

iii) Sia $c : [1, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la corona circolare parametrizzata da

$$c(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

e con bordo $\partial c = S^1_2 \cup S^1_1$, l'unione delle due circonferenze (opportunamente orientate!) di centro l'origine e di raggio rispettivamente 2 e 1. Calcolare i due integrali:

$$\int_{\partial c} \omega\,, \qquad \int_c \eta.$$

Soluzione i) Si ha $A_\omega = A_\eta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ii) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, ove

$$\omega_1 = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy, \quad \omega_2 = xdx + ydy.$$

Allora ω è somma di una forma chiusa, ma non esatta, e di una forma esatta. Pertanto ω è chiusa, ma non esatta.
η è chiusa, in quanto è una 2–forma, e in A_η l'unica 3–forma è quella nulla. Per stabilire se è esatta, cerchiamo una 1–forma γ di A_η tale che $\eta = d\gamma$. Ciò equivale a stabilire se esistano funzioni f e g differenziabili in A_η tali che

$$\gamma = f\,dx + g\,dy, \quad \eta = d\gamma.$$

Poiché

$$d\gamma = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

cerchiamo soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(x-1)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Si vede allora che

$$f(x, y) = -\frac{1}{x^2+y^2}\,, \quad g(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

sono due possibili funzioni. Allora una primitiva di η è

$$\gamma = -\frac{1}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$$

iii) Applicando il teorema di Stokes e ricordando che ω è chiusa, si ha

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0$$

Anche per η si ha

$$\int_c \eta = \int_c d\gamma = \int_{\partial c} \gamma$$

Questo integrale può essere calcolato in due modi diversi. Il calcolo diretto dà

$$\int_c \eta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} c^*\eta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{2\rho\, \sin\theta(\rho\, \cos\theta - 1)}{\rho^4} \rho\, d\rho\, d\theta = 0$$

Se invece si vuole calcolare γ lungo la 1–catena ∂c, si osservi che $\partial c = \alpha_1 - \alpha_2$, ove

$$\alpha_1(t) = (2\, \cos t, 2\, \sin t)\,, \quad \alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)\,, t \in [0, 2\pi]$$

Allora:

$$\int_{\partial c} \gamma = \int_{\alpha_1} \gamma - \int_{\alpha_2} \gamma = \int_0^{2\pi} \alpha_1^*\gamma - \int_0^{2\pi} \alpha_2^*\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin t\, \cos t\, dt - (1/2) \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0.$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ e con riferimento a coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3, x_4), si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + x_3 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}.$$

i) Calcolare il differenziale $d\omega$.

ii) Si consideri in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, per ogni $r > 0$, la 3-sfera di raggio r:

$$\alpha_r : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^4 - \{0\},$$

definita dalle seguenti equazioni parametriche (dove $\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], \psi \in [0, \pi]$):

$$\alpha_r(\theta, \varphi, \psi) = \begin{cases} x_1 = r\ \cos\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi, \\ x_2 = r\ \sin\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi, \\ x_3 = r\ \cos\varphi\ \sin\psi, \\ x_4 = r\ \cos\psi. \end{cases}$$

Calcolare l'integrale $\int_{\alpha_r} \omega$ e discutere la sua dipendenza da r.

iii) Il risultato del precedente calcolo fornisce qualche informazione sull'esattezza di ω in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$?

Soluzione. i) Scriviamo per comodità $\omega = \frac{1}{f}\omega_0$, essendo:

$$f = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2,$$

e:

$$\omega_0 = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + x_3 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Risulta:

$$d\omega = d(\frac{1}{f}\omega_0) = -\frac{df}{f^2} \wedge \omega_0 + \frac{1}{f} d\omega_0.$$

Essendo $df = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4)$, ne segue:

$$d\omega = -\frac{4(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} \wedge \omega_0 + \frac{4(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} =$$
$$= -\frac{4(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} + \frac{4(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = 0.$$

La forma ω è dunque chiusa in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$.

ii) I differenziali delle equazioni parametriche di α_r sono:

$$\begin{cases} dx_1 = -r \sin\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi\ d\theta + r \cos\theta\ \cos\varphi\ \sin\psi\ d\varphi + r \cos\theta\ \sin\varphi\ \cos\psi\ d\psi, \\ dx_2 = r \cos\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi\ d\theta + r \sin\theta\ \cos\varphi\ \sin\psi\ d\varphi + r \sin\theta\ \sin\varphi\ \cos\psi\ d\psi, \\ dx_3 = -r \sin\varphi\ \sin\psi\ d\varphi + r \cos\varphi\ \cos\psi\ d\psi, \\ dx_4 = -r \sin\psi\ d\psi. \end{cases}$$

Ne seguono le espressioni dei singoli addendi a numeratore della ω:

$$\begin{cases} x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = r^4 \cos^2\theta \ \sin^3\varphi \ \sin^4\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi, \\ -x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 = r^4 \sin^2\theta \ \sin^3\varphi \ \sin^4\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi, \\ x_3 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = r^4 \cos^2\varphi \ \sin\varphi \ \sin^4\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi, \\ -x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = r^4 \sin\varphi \ \cos^2\psi \ \sin^2\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \end{cases}$$

Tenuto conto che le stesse equazioni parametriche di α_r danno che il denominatore di ω è $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = r^4$, le precedenti espressioni forniscono, semplificando, la rappresentazione di ω nei parametri di integrazione:

$$\omega = \sin\varphi \ \sin^2\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi.$$

L'integrale richiesto è dunque:

$$\int_{\alpha_r} \omega = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \sin\varphi \ \sin^2\psi \ d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi =$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \, [-\cos\varphi]_0^{\pi} \left[\frac{\psi - \sin\psi\cos\psi}{2} \right]_0^{\pi} = (2\pi)(2)(\frac{\pi}{2}) = 2\pi^2,$$

che non dipende dal raggio r.

iii) Si osservi che α_r è una parametrizzazione della 3-sfera S_r^3 di centro l'origine e raggio r. Ne segue che ω non può essere esatta. Infatti, se fosse $\omega = d\chi$ per qualche 2-forma χ, il calcolo del punto ii) e il teorema di Stokes darebbero:

$$2\pi^2 = \int_{\alpha_r} \omega = \int_{S_r^3} \omega = \int_{S_r^3} d\chi = \int_{\partial S_r^3} \chi,$$

e poichè $\partial S_r^3 = \emptyset$, l'ultimo integrale risulterebbe nullo.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z):

a) il *semicilindro* (aperto) $\mathcal{S}$ definito dalle condizioni $(x^2 + y^2 = 1, \ z > 0)$,

b) il paraboloide ellittico $\mathcal{T}$ di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$.

Si consideri poi l'applicazione differenziabile $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x, y, z) = (xz, yz, z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathcal{S}.$$

i) Verificare che f ha valori nel paraboloide ellittico $\mathcal{T}$ e individuare il sottoinsieme $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ immagine di f.

ii) Dimostrare che $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}_0$ è un diffeomorfismo, costruendo la sua inversa $g : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{S}$.

iii) Fissato in $\mathcal{S}$ il punto $P = (0, 1, 2)$, si indichino due parametrizzazioni locali di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{T}$ intorno rispettivamente ai punti P e $f(P)$. Determinare quindi la matrice del differenziale $df_P : T_P\mathcal{S} \to T_{f(P)}\mathcal{T}$, rispetto alle basi indotte sui due piani tangenti dalle due parametrizzazioni scelte.

iv) Sia $\mathcal{C}$ l'elica circolare (contenuta in $\mathcal{S}$) parametrizzata da $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \frac{4}{\pi}t)$ con $t > 0$. Detto $\vec{v}$ il vettore tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \alpha(\frac{\pi}{2})$, determinare il vettore immagine $df_P(\vec{v})$, anche eventualmente utilizzando la matrice del differenziale df_P ottenuta al punto iii).

Soluzione. i) Per ogni $P = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ [ovvero $x^2 + y^2 = 1, \ z > 0$], risulta $(xz)^2 + (yz)^2 = z^2$, e pertanto $f(P) \in \mathcal{T}$. Inoltre $f(P) \neq O$, in quanto $z^2 > 0$. Dunque $\text{im } f = \mathcal{T}_0 = \mathcal{T} - \{0\}$. Per ogni $Q = (x, y, z) \in \mathcal{T}_0$, si definisca l'applicazione

$$g : \mathcal{T}_0 \to \mathbb{R}^3$$

nel modo seguente:

$$g(Q) = \big(\frac{x}{\sqrt{z}}, \frac{y}{\sqrt{z}}, \sqrt{z}\big).$$

Si tratta di un'applicazione differenziabile, essendolo le sue componenti, e si ha:

$$(g \circ f)(P) = g\big(xz, \, yz, \, z^2\big) = \big(\frac{xz}{\sqrt{z^2}}, \frac{yz}{\sqrt{z^2}}, \sqrt{z^2}\big) = P$$

$$(f\circ g)(Q) = f\big(\frac{x}{\sqrt{z}}, \frac{y}{\sqrt{z}}, \sqrt{z}\big) = \big(\frac{x\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \sqrt{z^2}\big) = Q.$$

Pertanto $g = f^{-1}\ \ f$ è un diffeomorfismo.

ii) $\mathcal{S}$ è parametrizzata, localmente intorno al suo punto $P = (0,1,2)$, da

$$\varphi(u,v) = \big(\cos u, \sin u, v\big), \qquad (u,v) \in (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}^+.$$

$\mathcal{T}$ è parametrizzata globalmente da

$$\psi(t,s) = \big(t, s, t^2+s^2\big), \qquad (t,s)\in\mathbb{R}^2.$$

Si ha:

$$P = \varphi(\frac{\pi}{2}, 2), \quad f(P) = (0,2,4) = \psi(0,2),$$

e denotiamo le controimmagini di P e di Q nella rispettive carte con:

$$P_1 = (\frac{\pi}{2}, 2), \quad Q_1 = (0,2).$$

Rispetto alle basi $\big(\varphi_u(P_1),\, \varphi_v(P_1)\big)$ e $\big(\psi_t((Q_1),\, \psi_s(Q_1)\big)$, il differenziale di f in P

$$df_P : T_P\mathcal{S} \to T_f(P)\mathcal{T}$$

si rappresenta con la matrice jacobiana $\big(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi\big)'(P_1)$. Risulta: $\big(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi\big)(u,v) = \psi^{-1}\big(v\cos u, v\,\sin u, v^2\big) = (v\cos u, v\sin u)$ e quindi tale matrice jacobiana risulta:

$$\big(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi\big)'(u,v) = \begin{pmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{pmatrix}.$$

In particolare nel punto P si ottiene:

$$J_P f = \big(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi\big)'(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Si noti che $\alpha = \varphi\circ\beta$, con $\beta(t) = (t, \frac{4}{\pi}t)$, e che $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0,1,2) = P$. Calcoliamo $df_P\big(\alpha'(\frac{\pi}{2})\big)$ utilizzando la matrice jacobiana $J_P f$ rappresentante df_P e ottenuta al punto ii). Risulta

$$\vec{v} = \alpha'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, \frac{4}{\pi}), \quad \varphi_u(P_1) = (-1,0,0), \quad \varphi_v(P_1) = (0,0,1).$$

Dunque nella base $\big(\varphi_u(P_1), \varphi_v(P_1)\big)$ di $T_P\mathcal{S}$, il vettore $\vec{v} = \alpha'(\frac{\pi}{2})$ ha coordinate $(1, \frac{4}{\pi})$. Ne segue che la sua immagine $df_P\big(\alpha'(\frac{\pi}{2})\big)$ ha coordinate date dal prodotto righe per colonna

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{4}{\pi} \end{pmatrix}$$

nella base $\big(\psi_t(Q_1)\psi_s(Q_1)\big)$ del piano tangente $T_{f(P)}\mathcal{T}$. Si conclude che:

$$df_P(\vec{v}) = df_P\big(\alpha'(\frac{\pi}{2})\big) = -2\,\psi_t(Q_1) + \frac{4}{\pi}\,\psi_s(Q_1) = \big(-2, \frac{4}{\pi}, \frac{16}{\pi}\big).$$