Cognome: .... **Nome:** ....

Preferenza per la prova orale: $\boxed{\textit{primo appello}}$ $\boxed{\textit{secondo appello}}$

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 26.1.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}$ la superficie parametrizzata di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$(x,y,z) = \alpha(u,v) = \Big(u, v, \frac{u-v}{uv}\Big), \qquad \text{essendo} \qquad (u,v) \in U = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ tali che } uv > 0\big\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{S}$ è una superficie differenziabile sconnessa e non limitata di $\mathbb{R}^3$.

ii) Verificare che $\mathcal{S}$ è formata da punti tutti iperbolici ($K < 0$).

iii) Sia $\mathcal{D}$ la curva in $U \subset \mathbb{R}^2$ parametrizzata da $\beta(t) = (t, \frac{1}{t})$, essendo $t > 0$, e sia $\mathcal{C} = \alpha(\mathcal{D})$ la sua immagine in $\mathcal{S}$. Determinare nel punto $P = (1,1,0)$ la curvatura e la torsione di $\mathcal{C}$. Calcolare poi la curvatura normale k_n in P della curva $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, e con riferimento a coordinate cartesiane (x, y, z), si consideri la 2-forma differenziale:

$$\omega = xy\ dx \wedge dy + xz\ dz \wedge dx + yz\ dy \wedge dz\,.$$

i) Verificare che ω è chiusa e che la 1-forma:

$$\varphi = \frac{1}{2}(xz^2\ dx + x^2 y\ dy + y^2 z\ dz)$$

è una primitiva di ω (ovvero $d\varphi = \omega$).

ii) Determinare l'integrale $\int_R \omega$, essendo R la regione del paraboloide ellittico:

$$z = x^2 + y^2$$

compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

iii) Determinare $\int_{R_1} \omega$, essendo R_1 la sottoregione di R appartenente al quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ (le limitazioni di R_1 sono dunque $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 1$).