Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 26.1.2016

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}$ la superficie parametrizzata di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$(x,y,z)=\alpha(u,v)=\Big(u,v,\frac{u-v}{uv}\Big), \qquad \text{essendo} \qquad (u,v)\in U=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \text{tali che } uv>0\big\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{S}$ è una superficie differenziabile sconnessa e non limitata di $\mathbb{R}^3$.
ii) Verificare che $\mathcal{S}$ è formata da punti tutti iperbolici ($K<0$).
iii) Sia $\mathcal{D}$ la curva in $U\subset\mathbb{R}^2$ parametrizzata da $\beta(t)=(t,\,\frac{1}{t})$, essendo $t>0$, e sia $\mathcal{C}=\alpha(\mathcal{D})$ la sua immagine in $\mathcal{S}$. Determinare nel punto $P=(1,1,0)$ la curvatura e la torsione di $\mathcal{C}$. Calcolare poi la curvatura normale k_n in P della curva $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}$.

Soluzione. i) $\mathcal{S}$ è grafico della funzione differenziabile $z=\frac{x-y}{xy}$, definita sull'aperto U. Poiché U è sconnesso e non limitato, tale è $\mathcal{S}$.

ii) Risulta:

$$\begin{cases}\alpha_u=(1,0,\frac{1}{u^2})\\ \alpha_v=(0,1,-\frac{1}{v^2})\end{cases}, \quad \begin{cases}\alpha_{uu}=(0,0,-\frac{2}{u^3})\\ \alpha_{uv}=(0,0,0)\\ \alpha_{vv}=(0,0,\frac{2}{v^3})\end{cases} \quad \begin{cases}E=1+\frac{1}{u^4}\\ F=-\frac{1}{u^2v^2}\\ G=1+\frac{1}{v^4},\end{cases} \quad \begin{cases}l=\frac{-\frac{2}{u^3}}{\sqrt{EG-F^2}},\\ m=0\\ n=\frac{\frac{2}{v^3}}{\sqrt{EG-F^2}}.\end{cases}$$

Allora $ln-m^2<0$ e dunque $K<0$, ovvero tutti i punti di $\mathcal{S}$ sono iperbolici.

iii) La curva $\mathcal{C}=\alpha(\mathcal{D})$ è parametrizzata da $\gamma(t)=\alpha(t,\frac{1}{t})=\big(t,\frac{1}{t},t-\frac{1}{t}\big)$, $t>0$. Poiché $\mathcal{C}$ è contenuta nel piano $x-y=z$, essa ha torsione τ identicamente nulla. Calcoliamo la curvatura k di $\mathcal{C}$ nel punto $P=\gamma(1)$. Si ha:

$$\begin{cases}\gamma'=\big(1,-\frac{1}{t^2},1+\frac{1}{t^2}\big)\\ \gamma''=\big(0,\frac{2}{t^3},-\frac{2}{t^3}\big)\end{cases},$$

e quindi $\gamma'(1)=(1,-1,2)$, $|\gamma'(1)|=\sqrt{6}$, $\gamma''(1)=(0,2,-2)$, $\gamma'(1)\wedge\gamma''(1)=(-2,2,2)$. Dunque

$$k(\mathcal{C},P)=\frac{|\gamma'(1)\wedge\gamma''(1)|}{|\gamma'(1)|^3}=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Per calcolare la curvatura normale $k_n(\mathcal{C},P)$ si può utilizzare la definizione

$$k_n(\mathcal{C},P)=k(\mathcal{C},P)\vec{n}(P)\cdot\vec{N}(P),$$

essendo $\vec{n}$, $\vec{N}$ i versori normali rispettivamente di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{S}$ Risulta: $\vec{N}(p)=(-1,1,1),\vec{n}=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. Dunque $\vec{n}\cdot\vec{N}=0$ e pertanto:

$$k_n(\mathcal{C},P)=0.$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, e con riferimento a coordinate cartesiane (x, y, z), si consideri la 2-forma differenziale:

$$\omega = xy\ dx \wedge dy + xz\ dz \wedge dx + yz\ dy \wedge dz\,.$$

i) Verificare che ω è chiusa e che la 1-forma:

$$\varphi = \frac{1}{2}(xz^2\ dx + x^2y\ dy + y^2z\ dz)$$

è una primitiva di ω (ovvero $d\varphi = \omega$).

ii) Determinare l'integrale $\int_R \omega$, essendo R la regione del paraboloide ellittico:

$$z = x^2 + y^2$$

compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

iii) Determinare $\int_{R_1} \omega$, essendo R_1 la sottoregione di R appartenente al quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ (le limitazioni di R_1 sono dunque $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 1$).

Soluzione. i) La verifica $d\omega = 0$ è immediata, essendo:

$$\frac{\partial(xy)}{\partial z} = \frac{\partial(xz)}{\partial y} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} = 0.$$

E' anche immediato che:

$$d\varphi = \frac{1}{2}[\frac{\partial(xz^2)}{\partial z}\ dz \wedge dx + \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}\ dx \wedge dy + \frac{\partial(y^2z)}{\partial y}\ dy \wedge dz] =$$

$$xz\ dz \wedge dx + xy\ dx \wedge dy + yz\ dy \wedge dz = \omega.$$

ii) Il bordo ∂R della regione limitata R è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ del piano $z = 1$, le cui equazioni parametriche sono $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$ (essendo $t \in [0, 2\pi]$). Da esse abbiamo subito i differenziali $dx = -\sin t\ dt, dy = \cos t\ dt, dz = 0$ e, sostituendo nell'espressione di φ abbiamo la nuova rappresentazione:

$$\varphi = \frac{1}{2}(-\sin t\ \cos t + \sin t\ \cos^3 t)\ dt.$$

Dunque, dal teorema di Stokes:

$$\int_R \omega = \int_R d\varphi = \int_{\partial R} \varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(-\int_0^{2\pi} \sin t\ \cos t\ dt + \int_0^{2\pi} \sin t\ \cos^3 t\ dt) = \frac{1}{2}[\frac{\cos^2 t}{2}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}[\frac{\cos^4 t}{4}]_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0.$$

iii) Il bordo ∂R_1 della regione limitata R_1 è invece costituito dall'unione dei seguenti tre archi di curva orientati. La prima curva α_1 è l'arco della circonferenza considerata al punto ii), ma con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La curva α_2 è la parabola $z = y^2$ (equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = t^2$, orientata con t da 1 a 0). La terza curva α_3 è invece la parabola $z = x^2$ (equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = t^2$, orientata con t da 0 a 1. Dunque:

$$\int_{R_1} \omega = \int_{R_1} d\varphi = \int_{\partial R_1} \varphi = \int_{\alpha_1} \varphi + \int_{\alpha_2} \varphi + \int_{\alpha_3} \varphi =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{\cos^4 t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_1^0 t^5\ dt + \int_0^1 \frac{1}{2} t^5\ dt = -\frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = -\frac{5}{24}.$$