Cognome: .... **Nome:** ....

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova in itinere del 11.11.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si consideri la superficie $S \subset \mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$x = u \cdot \cos v, \ y = u \cdot \sin v, \ z = 1/u$$

con $u \in (0, +\infty)$, $v \in [0, 2\pi]$.

i) Riconoscere che S è di rotazione attorno all'asse z e che il meridiano del piano xz è una ben nota curva $\mathcal{C}$.

ii) Calcolare la funzione $k(u)$ di curvatura di $\mathcal{C}$, determinarne massimi e minimi e disegnarne il grafico.

iii) Calcolare la curvatura gaussiana $K(u, v)$ di S, dare una spiegazione del fatto che essa è funzione della sola u, calcolarne massimi e minimi e disegnarne il grafico.

iv) Esistono punti di S con $K = -1$?

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbf{R^3}$ e al variare di $t \in \mathbf{R}$ le superfici S_t di equazioni parametriche:

$$\vec{r}^{\,t}(u,v) : \begin{cases} x = & cos\ t\ sin\ u\ sinh\ v + \ sin\ t\ cos\ u\ cosh\ v \\ y = & -\ cos\ t\ cos\ u\ sinh\ v + \ sin\ t\ sin\ u\ cosh\ v \\ z = & (cos\ t)u + (sin\ t)v \end{cases}$$

con le limitazioni $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbf{R}$. Si osservi che S_0 e $S_{\frac{\pi}{2}}$ sono (aperti di) rispettivamente un elicoide e un catenoide.

(i) Calcolare i coefficienti $E^t =< \vec{r}^{\,t}_u, \vec{r}^{\,t}_u >,\ F^t =< \vec{r}^{\,t}_u, \vec{r}^{\,t}_v >,\ G^t =< \vec{r}^{\,t}_v, \vec{r}^{\,t}_v >$ della prima forma fondamentale di S_t, deducendo che essi non dipendono da t. Si può da ciò affermare che le superfici S_t sono tutte tra loro isometriche?

(ii) Scrivere le componenti del versore normale $\vec{N}^t$ di S_t e calcolare quindi i coefficienti

$$l^t =< \vec{r}^{\,t}_{uu}, \vec{N} >,\ m^t =< \vec{r}^{\,t}_{uv}, \vec{N} >,\ n^t =< \vec{r}^{\,t}_{vv}, \vec{N} >$$

della seconda forma fondamentale di S_t.

(iii) Dedurne che le superfici S^t sono tutte minime ($H \equiv 0$) e calcolare la loro curvatura gaussiana K. Ci si poteva aspettare che K non dipende da t?