

Numero di matricola: Cognome: Nome:

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 22.7.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito numero di matricola, cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si consideri in \mathbb{R}^3 , con coordinate cartesiane (x, y, z) la superficie S grafico della funzione

$$z = x^2y^2.$$

- i) Utilizzando le prime due coordinate $x = u$, $y = v$ come parametri su S , si determinino i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali di S .
- ii) Si individui il luogo dei punti di S dove la curvatura gaussiana è nulla.
- iii) Scelta un'orientazione di S , e detta $N : S \rightarrow S^2$ la corrispondente applicazione di Gauss, si determini il sottoinsieme immagine $N(S) \subset S^2$.

Esercizio 2. Con riferimento alle coordinate (x, y) di \mathbb{R}^2 , si considerino le 1-forme differenziali

$$\omega_0 = (x - y) dx + (x + y) dy, \quad \omega_1 = \frac{x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy.$$

i) Determinare gli aperti di \mathbb{R}^2 in cui sono definite rispettivamente ω_0 e ω_1 .

ii) Stabilire se in tali aperti ω_0 e ω_1 sono chiuse e se sono esatte. Motivare la risposta e, in caso di forme esatte, scrivere una funzione primitiva.

iii) Si consideri poi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la famiglia di 1-forme differenziali:

$$\omega_\alpha = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\alpha} dy.$$

Indicare, al variare di α , l'aperto in cui esse sono definite, e stabilire per quali valori di α la 1-forma ω_α è chiusa.

iv) Stabilire infine se, per i valori di α determinati al punto iii), la forma ω_α è esatta nel semipiano $y < 0$. Motivare la risposta e, in caso affermativo, scrivere una funzione primitiva.