Numero di matricola: .... **Cognome:** .... **Nome:** ....

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 26.9.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito numero di matricola, cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z), la superficie S grafico della funzione

$$z = x^3 + x^4 + y^3.$$

i) Utilizzando le prime due coordinate $x = u$, $y = v$ come parametri su S, si determinino i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali di S.

ii) Individuare il luogo $\mathcal{P}$ dei punti di S dove la curvatura gaussiana è nulla ($\mathcal{P}$ è detta linea parabolica, luogo dei punti parabolici).

iii) Individuare il luogo $\mathcal{L}$ dei punti planari di S, ovvero dei punti in cui è identicamente nulla la seconda forma fondamentale: $l \equiv m \equiv n \equiv 0$.

Esercizio 2. Con riferimento alle coordinate (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$, si consideri la 2-forma differenziale

$$\omega \ = \ \frac{x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

i) Determinare l'aperto A di $\mathbb{R}^3$ in cui ω è definita.

ii) Stabilire se ω è chiusa in A.

iii) Osservando che sulla sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1 risulta

$$\omega|_{S^2} = x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy,$$

scrivere la 2-forma $\omega|_{S^2}$ usando le coordinate sferiche (θ, φ) di S^2, e dunque le sostituzioni:

$$x = \cos\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\cos\varphi, \quad z = \sin\varphi \qquad\qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}).$$

iv) Calcolare $\int_{S^2} \omega$ e dedurre se ω è esatta in A.