Numero di matricola: .... **Cognome:** .... **Nome:** ....

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 16.2.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito numero di matricola, cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{C}$ la curva dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\alpha(t) : (x = t \sin t,\ y = t \cos t,\ z = t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è regolare, ovvero che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ii) Verificare che $\mathcal{C}$ non ha flessi, ovvero che la sua curvatura è strettamente positiva.

iii) Determinare nel punto $O = \alpha(0) \in \mathcal{C}$ i tre versori di Frenet, la curvatura e la torsione. Scrivere nello stesso punto le equazioni della retta tangente e del piano osculatore.

iv) Sia $\mathcal{D}$ la curva ottenuta proiettando ortogonalmente $\mathcal{C}$ sul piano $z = 0$. Scrivere una parametrizzazione di $\mathcal{D}$ e determinare il punto di $\mathcal{D}$ a curvatura massima.

Esercizio 2. Con riferimento alle coordinate (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$, si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega = (x^2 + y^2 - 1)\ (dx + dy + dz).$$

i) Calcolare l' integrale di ω sull'arco c di elica circolare

$$c : \{(x = \cos t,\ y = \sin\ t,\ z = t),\ 0 \leq t \leq \pi\}.$$

ii) Scrivere l' espressione della 2-forma $d\omega$ in $\mathbb{R}^3$, e calcolare (senza usare il teorema di Stokes) l'integrale di $d\omega$ esteso alla regione R di elicoide

$$R : \{(x = v\cos t,\ y = v\sin t,\ z = t),\ 0 \leq t \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

iii) Disegnare una figura che descrive quanto segue. Il rettangolo Q del piano (t, v) definito dalle condizioni $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq v \leq 1$ e di cui R è immagine mediante le sue equazioni parametriche ha bordo $\partial Q = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, dato dalla somma formale dei suoi quattro lati orientati. Si noti che $\partial R = a + b + c + d$, essendo a, b, c, d le immagini rispettivamente di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mediante le stesse equazioni parametriche, ed essendo in particolare c l'arco di elica di cui al punto 1.

iv) Calcolare $\int_a \omega, \int_b \omega, , \int_c \omega, \int_d \omega$ e dedurne il valore di $\int_{\partial R} \omega$. Confrontare il risultato con l' integrale $\int_R d\omega$ calcolato al punto ii).