**Geometria Differenziale** (Prof. P. Piccinni) - Soluzioni della prova scritta del 16.2.2016

**Esercizio 1.** Sia $\mathcal{C}$ la curva dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\alpha(t) : (x = t \sin t,\ y = t \cos t,\ z = t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è regolare, ovvero che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ii) Verificare che $\mathcal{C}$ non ha flessi, ovvero che la sua curvatura è strettamente positiva.

iii) Determinare nel punto $O = \alpha(0) \in \mathcal{C}$ i tre versori di Frenet, la curvatura e la torsione. Scrivere nello stesso punto le equazioni della retta tangente e del piano osculatore.

iv) Sia $\mathcal{D}$ la curva ottenuta proiettando ortogonalmente $\mathcal{C}$ sul piano $z = 0$. Scrivere una parametrizzazione di $\mathcal{D}$ e determinare il punto di $\mathcal{D}$ a curvatura massima.

**Soluzione:** i) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ è differenziabile e biunivoca, con inversa $(x, y, z) \to z^{\frac{1}{3}}$, dunque un diffeomorfismo. Risulta $\alpha'(t) = (\sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t, 3t^2)$ che è non nullo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ii) Bisogna verificare che $|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta $\alpha''(t) = (2 \cos t - t \sin t, -2 \sin t - t \cos t, 6t)$, e quindi:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (2 + t^2)(3t \cos t, -3t \sin t, -1), \qquad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = (2 + t^2)\sqrt{1 + 9t^2} > 0.$$

iii) I tre versori di Frenet in $\alpha(0)$ sono:

$$\vec{t}(0) = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} = (0, 1, 0), \quad \vec{b}(0) = \frac{\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)}{|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)|} = (0, 0, -1), \quad \vec{n}(0) = \vec{b}(0) \wedge \vec{t}(0) = (1, 0, 0).$$

La curvatura è:

$$k(0) = \frac{|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = 2.$$

Infine, essendo $\alpha'''(0) = (0, -3, 6)$, la torsione risulta essere:

$$\tau(0) = -\frac{\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) \cdot \alpha'''(0)}{|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)|^2} = 3.$$

La retta tangente ha equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = 0$ e dunque cartesiane $x = z = 0$ (asse $y$). Il piano osculatore ha invece equazione

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $z = 0$.

iv) $\mathcal{D}$ ha equazioni parametriche $\beta(t) : (x = t \sin t,\ y = t \cos t,\ z = 0), \quad t \in \mathbb{R}$. Pertanto $\mathcal{D}$ ha curvatura

$$k^{\mathcal{D}}(t) = \frac{|\beta' \wedge \beta''|}{|\beta'|^3} = \frac{2 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}^3}.$$

Tale funzione ha derivata prima

$$\frac{d}{dt} k^{\mathcal{D}}(t) = \frac{-t(4 + t^2)\sqrt{1 + t^2}}{(1 + t^2)^3}.$$

Tale funzione ha un unico massimo per $t = 0$. Dunque $\beta(0) = O$ è il punto di $\mathcal{D}$ a curvatura massima. Si ha $k^{\mathcal{D}}(0) = 2$.

**Esercizio 2.** Con riferimento alle coordinate $(x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$, si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega = (x^2 + y^2 - 1)\ (dx + dy + dz).$$

i) Calcolare l' integrale di $\omega$ sull'arco $c$ di elica circolare

$$c : \{(x = \cos t,\ y = \sin\ t,\ z = t),\ 0 \le t \le \pi\}.$$

ii) Scrivere l' espressione della 2-forma $d\omega$ in $\mathbb{R}^3$, e calcolare (senza usare il teorema di Stokes) l'integrale di $d\omega$ esteso alla regione $R$ di elicoide

$$R : \{(x = v\cos t,\ y = v\sin t,\ z = t),\ 0 \le t \le \pi,\ 0 \le v \le 1\}.$$

iii) Disegnare una figura che descrive quanto segue. Il rettangolo $Q$ del piano $(t, v)$ definito dalle condizioni $0 \le t \le \pi$, $0 \le v \le 1$ e di cui $R$ è immagine mediante le sue equazioni parametriche ha bordo $\partial Q = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, dato dalla somma formale dei suoi quattro lati orientati. Si noti che $\partial R = a + b + c + d$, essendo $a, b, c, d$ le immagini rispettivamente di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mediante le stesse equazioni parametriche, ed essendo in particolare $c$ l'arco di elica di cui al punto 1.

iv) Calcolare $\int_a \omega$, $\int_b \omega$, , $\int_c \omega$, $\int_d \omega$ e dedurne il valore di $\int_{\partial R} \omega$. Confrontare il risultato con l' integrale $\int_R d\omega$ calcolato al punto ii).

**Soluzione:** i) Poiché risulta, lungo l'arco $c$ di elica, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, si ha subito che $\int_c \omega = 0$.

ii) Poiche' $d(x^2 + y^2 - 1) = 2xdx + 2ydy$,, risulta subito

$$d\omega = 2(x - y)dx \wedge dy - 2xdz \wedge dx + 2ydy \wedge dz.$$

L'integrale $\int_R d\omega$ può essere calcolato come integrale doppio. Passando ai parametri $(t, v)$ mediante le equazioni parametriche dell'elicoide risulta infatti:

$$d\omega = 2(x - y)dx \wedge dy - 2xdz \wedge dx + 2ydy \wedge dz = 2[v^2 \sin t - v^2 \cos t - v]dt \wedge dv,$$

ovvero come somma di prodotti con variabili separate

$$[2(\sin t - \cos t)dt] \wedge [v^2 dv] + [2dt] \wedge [-vdv].$$

Il calcolo dell'integrale ora è semplicissimo:

$$\int_R d\omega = \int_{0\le t\le\pi, 0\le v\le 1} d\omega = \int_0^\pi 2(\sin t - \cos t)dt \int_0^1 v^2 dv + 2\int_0^\pi dt \int_0^1 (-v)dv,$$

da cui

$$\int_R d\omega = \frac{4}{3} - \pi.$$

iii), iv) Il bordo $\partial R$ consiste dell'unione orientata del segmento $a$ sull'asse $z$ $(v = 0, 0 \le t \le \pi)$, del segmento orizzontale di generatrice $b$ $(t = \pi, 0 \le v \le 1)$, dell'arco di elica $c$, con orientazione data ora dalle $t$ decrescenti, e dal segmento orizzontale $d$ ($t = 0$ e $v$ decrescenti): Dunque:

$$\int_a \omega = \int_0^\pi (-dt) = -\pi, \qquad \int_b \omega = \int_0^1 (1 - v^2)dv = \frac{2}{3}, \qquad \int_c \omega = 0, \qquad \int_d \omega = \int_1^0 (v^2 - 1)dv = \frac{2}{3}.$$

Pertanto

$$\int_{\partial R} \omega = \frac{4}{3} - \pi = \int_R d\omega,$$

in accordo con il teorema di Stokes.