Cognome: .... **Nome:** ....

Preferenza per la prova orale: *primo appello* *secondo appello*

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova in itinere del 20.1.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Siano (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Si considerino le seguenti 1-forme differenziali:

$$\phi = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\, dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dz, \qquad \psi = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy,$$

e le curve chiuse

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = 2 + \cos u \\ y = 0 \\ z = \sin u \end{cases}, \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = 3\cos v \\ y = 3\sin v \\ z = 0 \end{cases},$$

$(u, v \in [0, 2\pi])$, rispettivamente meridiano e parallelo di un toro T di $\mathbb{R}^3$.

i) Determinare gli aperti A_ϕ e A_ψ di $\mathbb{R}^3$ in cui sono definite le 1-forme rispettivamente ϕ e ψ, e stabilire se ϕ e ψ sono chiuse e se sono esatte nei loro aperti A_ϕ e A_ψ di definizione.

ii) Calcolare $\int_{\mathcal{C}_1} \phi$, $\int_{\mathcal{C}_2} \phi$ $\int_{\mathcal{C}_1} \psi$, $\int_{\mathcal{C}_2} \psi$.

iii) Scrivere la 2-forma $\phi \wedge \psi$, determinarne l'aperto $A_{\phi\wedge\psi}$ di definizione e stabilire se $\phi \wedge \psi$ è chiusa.

iv) Determinare il valore dell'integrale $\int_T \phi \wedge \psi$.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie $\mathcal{S}$ di equazione cartesiana $z = x^3 - y^3$.

i) Si determini la curvatura gaussiana K nei punti di $\mathcal{S}$, precisandone i punti ellittici ($K > 0$), iperbolici ($K < 0$), parabolici ($K = 0$).

ii) Descrivere la curva $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ costituita dai punti parabolici di $\mathcal{S}$ e precisare se $\mathcal{C}$ è una curva piana o sghemba.

iii) Determinare la curvatura e la torsione della curva $\mathcal{C}$.

iv) Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la 1-forma

$$\omega = 3x^2 dx - 3y^2 dy - dz.$$

Determinare il valore di ω sui vettori tangenti a $\mathcal{C}$.